Feuille de TD 4
Intégrales doubles - Fubini

Exercice 1. *(Fubini)* Calculer les intégrales suivantes

1.1) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 x\ y\ dx\, dy.$

1.2) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^2 x\ y\ e^{x+y}\ dx\, dy.$

1.3) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à support compact. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\ dx = \int_0^{+\infty} \mu\big(\{x; f(x) \geq t\}\big)\ dt\,,$$

où μ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. *(Par étapes)* Calculer les intégrales suivantes

2.1) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \frac{dx\, dy}{1+x+y}.$

2.2) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |x+y|\ dx\, dy.$

2.3) Calculer l'aire délimitée par la parabole d'équation $y^2 = x$ et la droite d'équation $x = h$.

2.4) Calculer l'aire du domaine plan $\mathcal{D}$ défini par

$$\mathcal{D} := \big\{\,(x,y)\,;\, -1 \leq x \leq 1\,,\, x^2 \leq y \leq 4 - x^3\,\big\}\,.$$

2.5) En calculant de deux façons différentes

$$\int_0^{+\infty} \int_a^b e^{-x\,y}\ dx\, dy\,, \qquad 0 < a < b\,,$$

trouver la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-a\,x} - e^{-b\,x}}{x}\ dx.$$

Exercice 3. *(Coordonnées polaires)* Calculer les intégrales suivantes

3.1) $\displaystyle\int\int_{x^2+y^2 \leq R^2} \frac{dx\, dy}{(R^2 - x^2 - y^2)^{1/2}}.$

3.2) $\displaystyle\int\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\ dx\, dy$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\ dx.$

3.3) $\displaystyle\int\int_{\Delta} \frac{dx\, dy}{1+x^2+y^2}$ avec $\Delta := \big\{\,(x,y)\,;\, 0 \leq x \leq 1\,,\, 0 \leq y \leq 1\,,\, 0 < x^2+y^2 \leq 1\,\big\}.$

3.4) Etant donné $0 \leq \theta_0 \leq \theta_1 \leq 2\pi$, on considère l'aire $\mathcal{A}$ qui est délimitée par la courbe définie en coordonnées polaires par la fonction continue $\rho : [\theta_0, \theta_1] \to \mathbb{R}_+$.

3.4.1) Montrer que $\displaystyle\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_{\theta_0}^{\theta_1} \rho(\theta)^2\ d\theta.$

3.4.2) En déduire l'aire délimitée par l'intérieur de la lemniscate de Bernoulli qui est la courbe située à l'intérieur des deux boucles dessinées par

$$\left\{ \rho(\theta)\,(\cos\theta,\sin\theta)\,;\ \theta\in\mathbb{R}\,,\ \rho(\theta)=\sqrt{\cos 2\theta}\,\right\}.$$

Exercice 4. *(Changement de variables)*

4.1) Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et $(c,d)\in\mathbb{R}^2$ avec $0<a\le b$ et $0<c\le d$. Calculer l'aire de la surface

$$\left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2\,;\ a\le y/x^2\le b\,,\ c\le x\,y\le d\,\right\}.$$

4.2) Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ avec $0<a\le b$, et $\mathcal{A}:=\left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2\,;\ 0<x<y\,,\ a\le x\,y\le b\,,\ y^2-x^2<1\right\}$. En posant $u=x\,y$ et $v=y^2-x^2$, calculer

$$\int\!\!\int_D (y^2-x^2)^{x\,y}\ (x^2+y^2)\ dx\,dy\,.$$

Exercice 5. *(Intégrale de Gauss)* Retrouver la valeur de $J:=\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\,dx$ en calculant de deux manières l'intégrale double de la fonction $\varphi(x,y)=x\ e^{-x^2\,(1+y^2)}$ sur $]0,+\infty[^2$.