Feuille de TD 3
Equations différentielles dans le plan

Exercice 1. *(Valeurs propres réelles)* Calculer e^{tA} et résoudre $Y' = AY$ avec $Y(0) = Y_0$ où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2. *(Valeurs propres imaginaires)* Calculer e^{tA} et résoudre $Y' = AY$ avec $Y(0) = Y_0$ où

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3. *(Perturbation de l'EDO $y'' + y = 0$)* Soit $p \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on suppose que $p \in L^1(\mathbb{R})$, c'est à dire que $\int_{-\infty}^{+\infty} |p(t)|dt < +\infty$. Soit ϕ une solution de l'EDO linéaire homogène

$$y''(t) + (1 + p(t))y(t) = 0.$$

3.1) Calculez e^{tA} où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.2) On pose $f(t) = -p(t)\phi(t)$. Montrez que ϕ est une solution de l'EDO linéaire non homogène :

$$y'' + y = f.$$

Ecrivez le système d'ordre 1 équivalent puis calculez la résolvante de ce nouveau système.

3.3) En utilisant la formule de Duhamel, montrez qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\left\| \begin{pmatrix} \phi(t) \\ \phi'(t) \end{pmatrix} \right\| \leq C(1 + \int_0^t |p(s)\phi(s)|ds).$$

3.4) En déduire que ϕ est bornée.

Exercice 4. *(Perturbations de l'EDO $y'' = 0$)* Soit $q \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on suppose que $q \in L^1(\mathbb{R})$ c'est à dire que $\int_{-\infty}^{+\infty} |q(s)|ds < +\infty$.

4.1) Préliminaire/rappel : Critère de Cauchy pour les fonctions. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $T > 0$ tel que $\forall t \geq T, s \geq T$, on ait

$$|f(t) - f(s)| < \epsilon.$$

Montrez que f a une limite (finie) en $+\infty$.

4.2) Soit ϕ une solution bornée de $y''(t) + q(t)y(t) = 0$. Montrer que $\lim_{t \to +\infty} \phi'(t)$ existe.

4.3) En déduire que $\lim_{t \to +\infty} \phi'(t) = 0$.

4.4) Soient y_1, y_2 un système fondamental de solutions du système. Que dit la formule de Liouville dans ce cas ?

4.5) Montrer que l'équation $y''(t) + q(t)y(t) = 0$ admet des solutions non bornées. On procédera par l'absurde en s'aidant de la formule de Liouville.

Exercice 5. *(Valeurs propres doubles)* Trouver toutes les solutions de

$$y'' - 4\,y' + 4\,y = 0\,.$$

Exercice 6. *(Résonance)* Trouver toutes les solutions de
$$y'' + y = \sin x\,.$$

Exercice 7. *(Recherche EDO)* Soit $u \in \mathbb{R}^2, \|u\| = 1$, un vecteur unitaire du plan. On considère la courbe paramétrée par $t \in \mathbb{R}$,
$$X_u(t) = \begin{cases} t^2 u, \text{ si } t \geq 0, \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

7.1) Trouvez une EDO autonome dont quelque soit u unitaire, X_u soit solution.

7.2) Soit $v \neq u$, décrire les courbes X_u et X_v et leur intersection. Commenter.

Exercice 8. *(Comportement au voisinage d'un point d'équilibre)*

8.1) Déterminer les points stationnaires de l'EDO associée à $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par
$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - \sin(2x) \\ 1 - e^y \end{pmatrix}.$$

8.2) Que dire de leur stabilité ?

Exercice 9. *(Modèle écologique)*

9.1) Étant donné $x_0 > 0$, résoudre le problème de Cauchy suivant :
$$x'(t) = x(t)(1 - x(t)),\ x(0) = x_0.$$
On considère un modèle écologique à deux espèces sont en compétition pour les mÃªmes ressources. Le modèle est donné par l'équation suivante :
$$\begin{cases} x' = x(1 - x - y/2) \\ y' = y(1 - y - x/2) \\ x(0) = x_0,\, y(0) = y_0 \end{cases} \tag{0.1}$$

9.2) Justifiez l'existence et l'unicité de la solution maximale du problème de Cauchy (1).

9.3) Donnez les solutions de cette équation dans le cas à $x_0 > 0$ et $y_0 = 0$, et de même lorsque $x_0 = 0$ et $y_0 > 0$, et les représenter sur un dessin.

9.4) Déterminez les points d'équilibre.

9.5) Discutez de leur stabilité.

9.6) Montrez que si $x_0 > 0$ et $y_0 > 0$, alors $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$ pour tout t dans I.

9.7) On pose, pour $u > 0$,
$$A(u) = 2\left(1 - \frac{3u}{2}\right)\ln\frac{3u}{2},$$
Que pouvez-vous dire du signe de $A(u)$?

9.8) On pose
$$H(x, y) = (\ln(x) - \ln(2/3))^2 + (\ln(y) - \ln(2/3))^2 + (\ln(x) - \ln(y))^2\,,$$
Si $(x(t), y(t))$ est une solution de l'EDO avec $x_0 > 0, y_0 > 0$, déterminez une expression simple de
$$V(t) = \left(\frac{\partial}{\partial t}H(x, y)\right) - A(x) - A(y).$$

9.9) Toujours en supposant $x_0 > 0, y_0 > 0$, en déduire que les solutions restent bornées pour $t \geq 0$, puis sont définies pour tout $t \geq 0$.

9.10) (*) Montrez que $\lim_{t\to+\infty}(x(t), y(t)) = (2/3, 2/3)$