Feuille de TD 2
Equations différentielles - Rappels de résolution - Cauchy-Lipschitz - Pendule

Exercice 1. *(Techniques de base)* Résoudre les EDOs suivantes

(1) $y'' + 4y = 0$, $y(0) = 1, y'(0) = 0$.

(2) $y'' - 3y' + 2y = 0$.

(3) $y'' + 4y = \cos(\alpha t)$, où α est un réel.

(4) $\left(1 + t^2\right) y' = 2ty + 5\left(1 + t^2\right)$.

(5) $\left(1 + t^2\right) y' = ty + 5\left(1 + t^2\right)$.

Exercice 2. *(Variables séparables)* Résoudre les EDOs suivantes

(1) $y' = \dfrac{\pi}{4} \cos(t) \left(1 + y^2\right)$.

(2) $y' = (1 - y)\, y$.

(3) $y' = t\sqrt{1 - y^2}$.

Exercice 3. *(Equations de Ricatti, Bernoulli et Lagrange)* Résoudre les EDOs suivantes

(1) $y' = y - \sqrt{y}$.

(2) $y' = y^2 - xy + 1$.

Exercice 4. *(Dans le plan)* Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. On considère le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = -y + x(x^2 + y^2), & x(0) = x_0, \\ y' = x + y(x^2 + y^2), & y(0) = y_0. \end{cases}$$

4.1) Transformez ce système en coordonnées polaires (ρ, θ), càd en posant

$$\begin{cases} x = \rho\cos(\theta), \\ y = \rho\sin(\theta), \end{cases}$$

déterminez l'EDO vérifiée par $\theta(t)$ et $\rho(t)$.
4.2) Résolvez.

Exercice 5. *(Lemme de Grönwall)* Soit f, g deux fonctions positives, et u une fonction, toutes définies sur $\mathbb{R}^+$, telles que

$$\forall t \geq 0, \quad u(t) \leq f(t) + \int_0^t g(s)u(s)ds.$$

5.1) On pose

$$Y(t) = \left(\int_0^t u(s)g(s)ds\right) \exp\left(-\int_0^t g(s)ds\right).$$

Majorez la dérivée de Y en fonction de f, g uniquement.
5.2) Déduisez-en que

$$u(t) \leq f(t) + \int_0^t f(s)g(s)e^{\int_s^t g(x)dx}ds.$$

Exercice 6. *(Comparaison de solutions)* Soit $y' = f(y)$ une EDO autonome, avec $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction localement lispchitzienne.

6.1) Soient y_1, y_2 deux solutions maximales de l'EDO, définies sur des intervalles J_1, J_2. On suppose qu'il existe $t_1 \in J_1, t_2 \in J_2$ tels que $y_1(t_1) = y_2(t_2)$. Montrez que si on pose $\tau = t_2 - t_1$, alors $J_2 = J_1 + \tau$ et $\forall t \in J_1, y_1(t) = y_2(t + \tau)$.

6.2) Soit y une solution maximale définie sur un intervalle J. Supposons qu il existe $\tau_1 \neq \tau_2 \in J$ tels que $y(\tau_1) = y(\tau_2)$. Montrer que $J = \mathbb{R}$ et que y est périodique.

Exercice 7. *(Van der Pol)* Etant donné $\varepsilon > 0$, on considère l'équation différentielle

$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = x - \varepsilon(x^2 - 1)\, y. \end{cases}$$

7.1) Appliquez les résultats du cours pour discuter de l'existence et/ou de l'unicité d'éventuelles solutions maximales de cette équation, satisfaisant des conditions initiales $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, ainsi que de leur intervalle de définition I.

7.2) Déterminez les éventuelles solutions stationnaires (cÃ d constantes) de cette équation.

7.3) Soit dorénavant $(x(t), y(t))$ une solution maximale, d'intervalle de définition $I =]T^-, T^+[$. Posons $r(t) = x^2(t) + y^2(t)$. Montrez que r vérifie $\dot{r} \leq 2\varepsilon r$.

7.4) En déduire que $T^+ = +\infty$.

Exercice 8. *(Prolongement)* On considère l'équation différentielle du premier ordre avec condition initiale suivante : pour $x \geq 0$ (on ne regarde que le temps positifs)

$$(E) \quad y' = y^2 - x, \quad y(0) = 0.$$

Soit $(y, [0, b[)$ la solution maximale de (E) $(b \in \bar{\mathbb{R}})$.

8.1) Donner un équivalent simple de y en 0. En déduire l'existence de $\delta \in]0, b[$ tel que pour tout $x \in]0, \delta[$ on ait $y^2(x) < x$.

8.2) Montrer que $y^2(x) < x$ pour tout $x \in]0, b[$.

8.3) Montrer que si b était fini, y serait bornée sur $[0, b[$. En déduire que $b = +\infty$.

Exercice 9. *(Pendule simple)* On considère l'équation $\ddot{\theta} + \dfrac{g}{l} \sin(\theta) = 0$ où g, l sont des constantes physiques strictement positives.

9.1) Montrez que les solutions maximales sont définies sur $\mathbb{R}$.

9.2) Montrez que l'énergie totale (cinétique+ potentielle) $E = m \left(\dfrac{1}{2} l^2 \dot{\theta}^2 - gl \cos(\theta) \right)$ où $m > 0$ est une constante physique, est une intégrale première du mouvement (càd constante).

9.3) On suppose dans la suite que l'on lâche le pendule au temps $t_0 = 0$ à un angle $\theta(0) = \theta_0 \in]-\pi, \pi[$, avec une vitesse nulle $\dot{\theta}(0) = 0$. Montrez que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cos(\theta) \geq \cos(\theta_0)$.

9.4) Sur tout intervalle I où $\dot{\theta} > 0$, écrire une équation du premier ordre à variable séparées dont θ est solution.

9.5) On suppose $\theta_0 \neq 0$. Étudiez la fonction sur l'intervalle $] - |\theta_0|, |\theta_0|[$,

$$F(x) = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^x \frac{du}{\sqrt{\cos(u) - \cos(\theta_0)}},$$

et en particulier ses limites aux bornes de cet intervalle.

9.6) On suppose que $\theta_0 \in] - \pi, 0[$. Montrez que $\dot{\theta} > 0$ sur un intervalle maximal de la forme $]0, t_1[$, puis montrez que

$$t_1 = \sqrt{\frac{2l}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{du}{\sqrt{\cos(u) - \cos(\theta_0)}}.$$

9.7) Montrez que la solution θ est périodique, de période $2t_1$.

9.8) Montrez qu'il existe au moins une (autre) condition initiale $(\dot{\theta}(0), \theta(0))$ pour laquelle la solution n'est pas périodique.