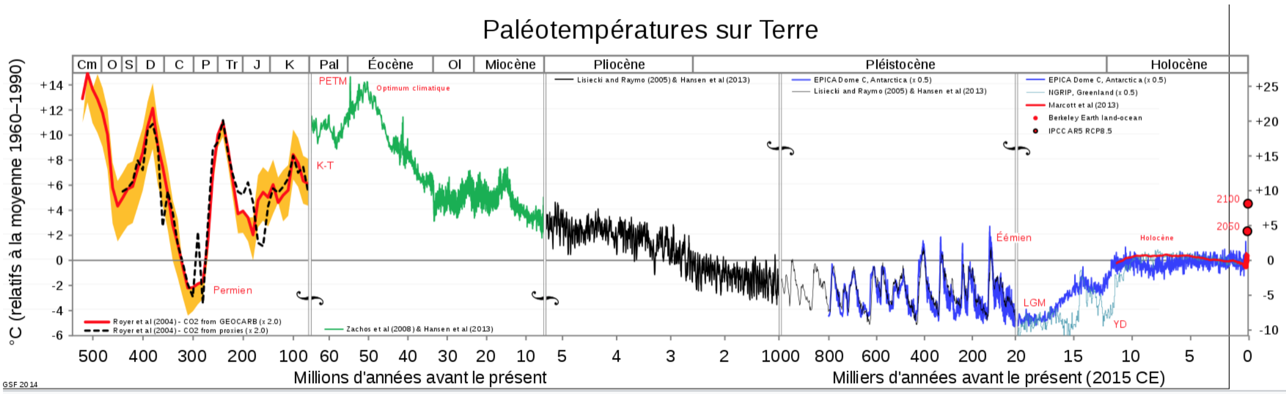
Feuille de TD 1
Equations différentielles et modèles climatiques

Figure 1. Evolution de la température sur des temps géologiques ($\simeq 10^9$ années) :



Température globale moyenne au cours des 540 derniers millions d'années.

Figure 2. Evolution de la température depuis la révolution industrielle ($\simeq 100$ années) :

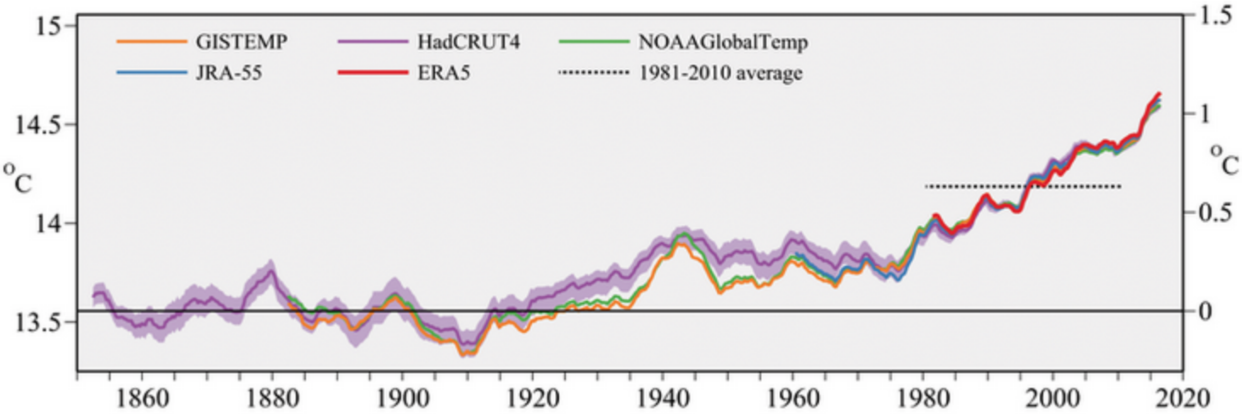
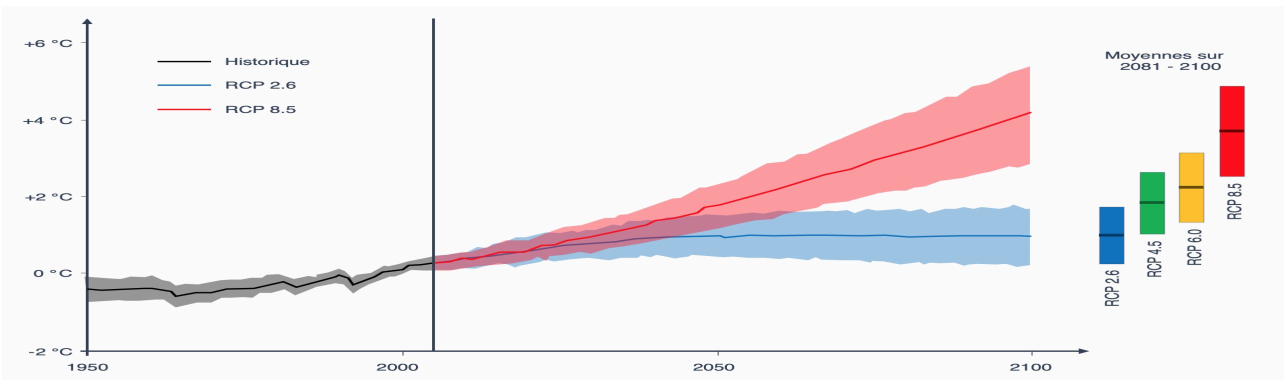


Figure 3. Projections d'après le 5 ème rapport du GIEC ($\simeq 80$ prochaines années) :



Comment modéliser et comprendre ces évolutions ?

Bilan radiatif et ses paramètres physiques

On peut évaluer la température moyenne T (mesurée en Kelvins K avec 273 K $\equiv 0° C$) de l'atmosphère terrestre en fonction du temps t (avec une année pour unité et $t = 0$ qui correspond à aujourd'hui) selon le modèle ci-dessous (proposé par Walsh and McGehee [2013]) qui est basé sur un bilan d'énergie

$$R\,\frac{dT}{dt} = Q\,(1-\alpha) - \epsilon\,\sigma\,T^4\,. \tag{0.1}$$

Les paramètres R, Q, α, σ et ϵ qui apparaissent dans cette *équation différentielle ordinaire* scalaire ($T \in \mathbb{R}$) et à coefficients variables (Q, α et ϵ peuvent dépendre du temps) sont les suivants :

- R représente la capacité thermique (ou capacité calorifique) de l'atmosphère. C'est la grandeur qui mesure la chaleur qu'il faut transférer à l'atmosphère pour augmenter sa température d'un kelvin. On la prend constante, égale à $R = 2.912\,W/m^2\,K$.

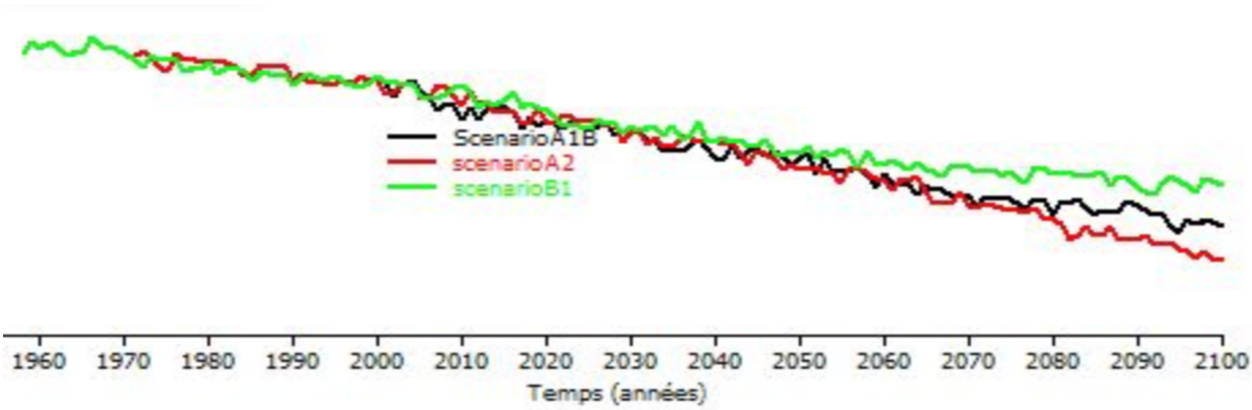
- Q représente l'irradiation solaire (aussi appelée constante solaire). C'est la grandeur radiométrique qui mesure la quantité d'énergie solaire reçue par l'atmosphère par unité de surface. Elle est évaluée actuellement à $Q(0) = 342\,W/m^2$. C'est une fonction qui dépend du temps (ainsi que de la latitude si on veut être précis) et qui peut se décrire via :

$$Q(t) = 342\,\left(1 - (4 \times 10^{-10}\,t/4,7)\right)^{-1}.$$

Question 1. Comparer la loi donnée pour Q et la figure 1. Peut-on dire que l'augmentation de Q est le seul facteur influençant la température ? Quels sont les autres facteurs principaux ?

Question 2. La formation du système solaire date d'environ 4,4 milliards d'années. Dans 4,7 milliards d'années, notre Soleil commencera à se transformer en géante rouge. A l'issue de ces 4,7 milliards d'années, de quel pourcentage le soleil sera-t'il plus puissant qu'aujourd'hui ? Quelles sont les échelles de temps impliquées lorsqu'on parle d'anthropocène ?

- $\alpha = 0.34$ représente l'albédo moyen actuel de la Terre. C'est un coefficient sans dimension qui prend en compte le pouvoir réfléchissant moyen de la surface terrestre. Dans la pratique, un corps est perçu comme blanc dès qu'il réfléchit au moins 80 % de la lumière d'une source lumineuse blanche. A l'inverse, tout corps réfléchissant moins de 3 % de la lumière incidente paraît noir. Le graphe ci-dessous représente différents scénarios pour l'évolution de $\alpha(\cdot)$ en fonction du temps :



Question 3. Donner des ordres de grandeur pour les albédos du sol (sombre), des forêts de conifères et de la mer, des forêts de feuillus et des cultures, des nuages, ainsi que de la neige et de la glace. Comment pourrait s'expliquer la baisse de l'albédo selon les trois scénarios du Giec retracés ci-dessus ?

- $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}\,W\,m^{-2}\,K^{-4}$ est la constante de Stefan-Boltzmann. C'est un invariant.

- $\epsilon \in]0,1]$ correspond à un flux radiatif (émissivité) ou rayonnement électromagnétique (de basse énergie ou de grande longueur d'onde) émis de la Terre vers l'espace dans le domaine infrarouge. Prendre $\epsilon = 1$, c'est considérer que l'atmosphère ne bloque pas ce rayonnement. Prendre $\epsilon = 0$, c'est considérer au contraire que l'atmosphère bloque complètement ce rayonnement. Dans la pratique, la valeur du nombre ϵ est donc comprise entre 0 et 1. Elle diminue en présence de gaz à effet de serre, tels que le méthane (CH4), l'oxyde nitreux (N2O), la vapeur d'eau (H2O) et le dioxyde de carbone (CO2). En effet, ces gaz absorbent certaines longueurs d'onde du flux infrarouge pour les ré-émettre ensuite vers la Terre.

Question 4. Pourquoi les baisses des fonctions $\epsilon(\cdot)$ et $\alpha(\cdot)$ sont-elles corrélées ? Et pourquoi parle-t'on surtout de CO2 lorsqu'on évoque le réchauffement climatique ?

Exercice 1) Calculs de températures d'équilibre.

1.1) On suppose ici $\epsilon = 1$ (même dans le cas d'une terre boule de neige, on aurait $\epsilon \simeq 0.62$).

1.1.1) Quelle serait alors actuellement la température d'équilibre T^* à la surface de la terre ?

1.1.2) La température moyenne sur mars est de $-63°C$. Comment l'expliquer alors que son atmosphère est composée à 96% de CO2 ?

1.2) La température d'équilibre T^* actuellement mesurée à la surface de la terre est de $15.4°C$.

1.2.2) Comment faut-il ajuster ϵ pour obtenir ce résultat ?

1.2.2) Quelle serait la température d'équilibre T^* à la surface de la terre dans le cas où ϵ puisse atteindre la valeur $0,1$ (pas de nuage et sol complètement sombre) ? Conclusion ?

Exercice 2) Recours à un modèle linéaire près d'un l'équilibre.

2.1) On se place près de la température d'équilibre T^*. On peut alors chercher T sous la forme $T^* + \eta\,\mathcal{T}$ avec $|\eta| \ll 1$. Si on néglige les termes d'ordre supérieur (à un) en puissances du paramètre η, quelle est l'équation vérifiée par $\mathcal{T}$, et donc par la perturbation de température $\Delta T = \eta\,\mathcal{T}$?

2.2) On considère l'équation $\mathcal{T}' = -\kappa\,\mathcal{T}$ avec $\kappa \in \mathbb{R}_+^*$.

2.2.1) Quelle est la solution de cette équation sachant qu'ont part à l'instant $t = 0$ de $\mathcal{T}_0$?

2.2.2) Combien faut-il attendre de temps pour que la perturbation initiale de température $\mathcal{T}_0$ diminue de moitié ? Interprétation ?

2.2.3) Que dire du comportement de la solution pour t qui tend vers $+\infty$? Conclusion ?

2.3) On introduit un coefficient qui dépend du temps et un terme source de forçage :

$$(\star) \qquad \mathcal{T}' = -\kappa(t)\,\mathcal{T} + F(t)\,, \qquad \mathcal{T}(0) = \mathcal{T}_0\,, \qquad \kappa : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,.$$

2.3.1) Résoudre $(\star)$ lorsque $F \equiv 0$ et $\mathcal{T}_0 = 2$.

2.3.2) Résoudre $(\star)$ dans le cas général.

2.3.3) On suppose que la fonction $\kappa(\cdot)$ est constante (égale à $\kappa \in \mathbb{R}_+^*$), et que la fonction F converge vers une limite finie $\ell \in \mathbb{R}_+^*$ pour t qui tend vers $+\infty$. Que devient le comportement de la solution pour t qui tend vers $+\infty$?

2.3.4) Résoudre $(\star)$ par un calcul plus direct dans les deux cas suivants :

a) $(1+t^2)\,\mathcal{T}' = 2\,t\,\mathcal{T} + 5\,(1+t^2)$.

b) $(1+t^2)\,\mathcal{T}' = t\,\mathcal{T} + 5\,(1+t^2)$.

2.4) On note $\mu \in \mathbb{R}_+^*$ un coefficient d'échange de chaleur entre atmosphère et océan. Soit $\mathscr{T}$ la température moyenne de l'océan. On peut coupler l'évolution de la température $\mathcal{T}$ à celle de $\mathscr{T}$ via

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathcal{T}}{dt} = -\kappa\,(\mathcal{T} - T^*) - \mu\,(\mathcal{T} - \mathscr{T})\,, \\ \dfrac{d\mathscr{T}}{dt} = +\mu\,(\mathcal{T} - \mathscr{T})\,. \end{cases}$$

2.4.1.) Quelles sont les raisons du choix des signes $\pm$ en face de μ ? Quel est le rôle de l'océan dans le réchauffement climatique ?

2.4.2.) La solution retourne-t'elle toujours vers un équilibre ? Et, si c'est oui, le fait-elle selon les mêmes modalités ?

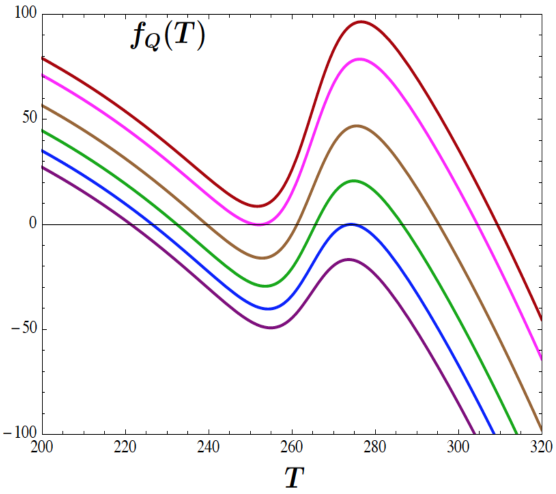
Exercice 3) Bifurcation. On revient vers le modèle (0.1) mais cette fois-ci avec un albédo α qui varie avec la température selon la loi

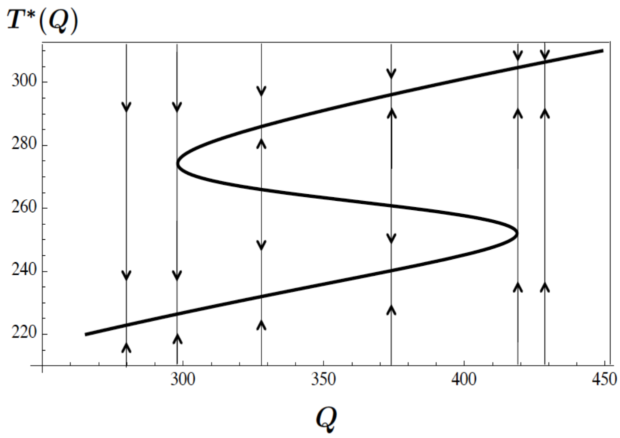
$$\alpha(T) = 0.5 + 0.2\ \tanh\big(0.1\,(265 - T)\big).$$

On note $f_Q(T)$ le nouveau terme source de (0.1) ainsi obtenu, à savoir

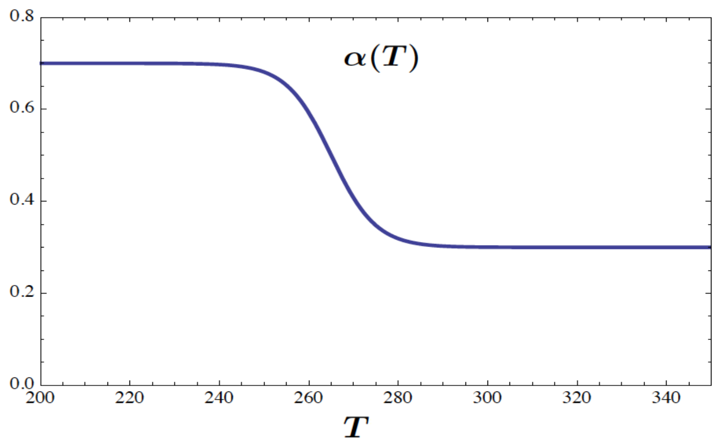
$$f_Q(T) = Q\ \big(1 - \alpha(T)\big) - \epsilon\ \sigma\ T^4.$$

On désigne par $T^*(Q)$ une température d'équilibre associée á f_Q, c'est à dire vérifiant $f_Q(T^*) = 0$. On admet (le vérifier par le calcul ou par un programme informatique si souhaité) que le graphe des fonctions f_Q et T^* est comme indiqué ci-après. Sur le dessin de gauche, du bas vers le haut, les graphe dessinés pour f_Q prennent en compte des valeurs de plus en plus grandes de Q.





3.1) Expliquer pourquoi le graphe de α ressemble au dessin affiché ci-dessous et indiquer des raisons qui permettraient d'expliquer ce comportement.



3.2) Expliquer l'allure du graphe de T^* à partir de celui de f_Q.

3.3) Expliquer le sens des flèches sur le graphe de T^* ainsi que leur signification. Quels scénarios se dessinent si on part à Q fixé d'une température T hors équilibre ? Quelle partie du graphe de $T^*(\cdot)$ nous concerne aujourd'hui, et quelles conclusions peut-on en tirer ?

3.4) Depuis la formation du système solaire, il y a environ 4,7 milliards d'années, l'intensité du rayonnement solaire (l'irradiation Q) a augmenté (voir la question 1) . A cette époque, elle ne valait que 70 % de sa valeur actuelle et, pendant le Carbonifère, il y a environ 300 millions d'années, elle était environ 2,5 % moins élevée qu'aujourd'hui. La diminution du paramètre ϵ (du fait par exemple de l'augmentation de l'effet de serre) joue dans le même sens car c'est le produit Q/ϵ qui importe pour le calcul de T^*. Au début de l'histoire de la Terre, la valeur de Q tournait autour de $280\,Wm^{-2}$, ce qui correspond à une température de $-50°C$. La terre devait alors être couverte de glace. Mais on sait que l'eau était présente à cette époque (trace de sédiments datés). Quelle(s) hypothèse(s) peut-on formuler pour expliquer ce paradoxe du jeune Soleil faible ?

3.5) Que se passerait-il si les données pouvaient être proches de l'un ou l'autre des deux points de bifurcation obtenus pour $(Q, T^*) \simeq (420, 250)$ ou $(Q, T^*) \simeq (300, 275)$, valeurs pour lesquelles $f'_Q(T^*) = 0$? Ces valeurs peuvent-elles être atteintes dans la pratique ? Quels sont les grands facteurs de refroidissement et de réchauffement au cours des ères géologiques ?

Pour en savoir plus sur la modélisation du climat, on peut se reporter :
- au cours de M. Ghil et B. Deremble sur la dynamique du climat ;
- à cet exposé de J. Cattiaux sur la modélisation du système climatique ou encore à ces explications de J. Walsh.

Par ailleurs, le cours de Paris-Saclay sur les enjeux de la transition écologique permet d'appréhender les mécanismes de base du fonctionnement climatique.