# La preuve en mathématiques : construction et vérification

Christophe Cheverry

**I**nstitut de **R**echerche **Ma**thématiques de **R**ennes

*christophe.cheverry@univ-rennes1.fr*

Journées de la Recherche (UBO)

Le 03 février 2020

## Quelques lieux communs.

- *Il n'est pas de mathématiques sans preuve ?*

Conjectures (Pythagore, Fermat, ...), concepts, langage, art, ...

# Quelques lieux communs.

- *Il n'est pas de mathématiques sans preuve ?*

Conjectures (Pythagore, Fermat, ...), concepts, langage, art, ...

- *Il n'y a de preuves certaines qu'en mathématique ?*

Preuve + ou - aboutie (absolue, irréfutable, robuste ou demi-preuve).
Poursuite collective d'une perfection.

# Quelques lieux communs.

- *Il n'est pas de mathématiques sans preuve ?*

Conjectures (Pythagore, Fermat, ...), concepts, langage, art, ...

- *Il n'y a de preuves certaines qu'en mathématique ?*

Preuve + ou - aboutie (absolue, irréfutable, robuste ou demi-preuve).
Poursuite collective d'une perfection.

- *En mathématique, une seule preuve suffit ?*

Quod erat demonstrandum (cqfd).
Une seule preuve suffit pour en chercher d'autres. Une seule preuve suffit aussi (parfois) pour que l'énoncé porte le nom de son auteur.
Les preuves sont autant de mémoires qu'ils seraient dangereux de perdre.

# Table des matières


1. Mise en place.
   - 1.1. Quelques points de vocabulaire.
   - 1.2. Différentes techniques de preuve.
   - 1.3. Typologie des "preuves".
2. Deux preuves en géométrie du triangle.
   - 2.1. Théorème des médiatrices.
   - 2.1. Théorème de Thalès.
3. Le triangle curry.
   - 3.1. Construction d'une preuve.
   - 3.2. Vérification d'une preuve.
   - 3.3. Epilogue.

# Table des matières

1. Mise en place.
   1.1. Quelques points de vocabulaire.
   1.2. Différentes techniques de preuve.
   1.3. Typologie des "preuves".
2. Deux preuves en géométrie du triangle.
   2.1. Théorème des médiatrices.
   2.1. Théorème de Thalès.
3. Le triangle curry.
   3.1. Construction d'une preuve.
   3.2. Vérification d'une preuve.
   3.3. Epilogue.

◁ **Raisonnement.** Activité intellectuelle de manipulation d'informations pour, à partir de données, produire de nouvelles informations.

◁ **Raisonnement.** Activité intellectuelle de manipulation d'informations pour, à partir de données, produire de nouvelles informations.

"**Cogito ergo sum**", *R. Descartes*, Discours de la méthode (1637).

◁ **Raisonnement.** Activité intellectuelle de manipulation d'informations pour, à partir de données, produire de nouvelles informations.

"**Cogito ergo sum**", *R. Descartes*, Discours de la méthode (1637).

◁ **Explication.** Deux points de vue :

↪ En *didactique*, discours visant à rendre intelligible une vérité (connue et maitrisée par celui qui parle) par des raisonnements susceptibles d'être refusés ou acceptés, dans tous les cas discutés (par celui qui les reçoit).

◁ **Raisonnement.** Activité intellectuelle de manipulation d'informations pour, à partir de données, produire de nouvelles informations.

"**Cogito ergo sum**", *R. Descartes*, Discours de la méthode (1637).

◁ **Explication.** Deux points de vue :

↪ En *didactique*, discours visant à rendre intelligible une vérité (connue et maitrisée par celui qui parle) par des raisonnements susceptibles d'être refusés ou acceptés, dans tous les cas discutés (par celui qui les reçoit).

↪ En *sciences exactes*, opération destinée à ramener un phénomène à ses origines ou à ses causes afin de le placer sous des lois scientifiques, jusqu'à l'insérer dans un formalisme mathématique.

◁ **Raisonnement.** Activité intellectuelle de manipulation d'informations pour, à partir de données, produire de nouvelles informations.

"**Cogito ergo sum**", *R. Descartes*, Discours de la méthode (1637).

◁ **Explication.** Deux points de vue :

↪ En *didactique*, discours visant à rendre intelligible une vérité (connue et maitrisée par celui qui parle) par des raisonnements susceptibles d'être refusés ou acceptés, dans tous les cas discutés (par celui qui les reçoit).

↪ En *sciences exactes*, opération destinée à ramener un phénomène à ses origines ou à ses causes afin de le placer sous des lois scientifiques, jusqu'à l'insérer dans un formalisme mathématique.

"**Ce qui est aujourd'hui un paradoxe pour nous sera pour la postérité une vérité démontrée**", D. Diderot (1713–1784).

$\lhd$ **Preuve** et/ou(?) **démonstration**. Un processus aux facettes variées :

$\hookrightarrow$ En *général*, explication construite par une communauté donnée à un moment donné, et acceptée à l'issue d'un système de validation.

◁ **Preuve** et/ou(?) **démonstration**. Un processus aux facettes variées :

↪ En *général*, explication construite par une communauté donnée à un moment donné, et acceptée à l'issue d'un système de validation.

↪ Pour les *mathématiciens*, ne peuvent être acceptées pour preuve que des explications ayant une forme particulière, s'appuyant sur un corps de connaissances très institutionnalisé, produisant une suite de définitions, lemmes, propositions et théorèmes organisés selon des règles déterminées. Un énoncé est connu comme étant vrai (axiomes), ou bien déduit de ce qui précède par déduction.

◁ **Preuve** et/ou(?) **démonstration**. Un processus aux facettes variées :

↪ En *général*, explication construite par une communauté donnée à un moment donné, et acceptée à l'issue d'un système de validation.

↪ Pour les *mathématiciens*, ne peuvent être acceptées pour preuve que des explications ayant une forme particulière, s'appuyant sur un corps de connaissances très institutionnalisé, produisant une suite de définitions, lemmes, propositions et théorèmes organisés selon des règles déterminées. Un énoncé est connu comme étant vrai (axiomes), ou bien déduit de ce qui précède par déduction.

"**Si l'esprit d'un homme s'égare, faites-lui étudier les mathématiques car dans les démonstrations, pour peu qu'il s'écarte, il sera obligé de recommencer**",
F. Bacon (1561–1626).

# Table des matières


1. Mise en place.
   - 1.1. Quelques points de vocabulaire.
   - 1.2. Différentes techniques de preuve.
   - 1.3. Typologie des "preuves".
2. Deux preuves en géométrie du triangle.
   - 2.1. Théorème des médiatrices.
   - 2.1. Théorème de Thalès.
3. Le triangle curry.
   - 3.1. Construction d'une preuve.
   - 3.2. Vérification d'une preuve.
   - 3.3. Epilogue.

- **Méthode par opération opposée**.

Dictionnaire de l'Académie française (1798).

Preuve : "*En termes d'arithmétique et d'algèbre se dit de la vérification d'une opération de calcul, qui se fait par l'opération opposée.*

- **Méthode par opération opposée**.

Dictionnaire de l'Académie française (1798).

Preuve : "*En termes d'arithmétique et d'algèbre se dit de la vérification d'une opération de calcul, qui se fait par l'opération opposée.*

Exemples : $8 - 3 = 5$ car $5 + 3 = 8$
$8/2 = 4$ car $4 \times 2 = 8$
$\sqrt{9} = 3$ car $3^2 = 9$

$\hookrightarrow$ Géométrie analytique, algébrique, ...

- **Méthode par opération opposée**.

Dictionnaire de l'Académie française (1798).

Preuve : "*En termes d'arithmétique et d'algèbre se dit de la vérification d'une opération de calcul, qui se fait par l'opération opposée.*

Exemples : $8-3=5$ car $5+3=8$
$8/2=4$ car $4\times 2=8$
$\sqrt{9}=3$ car $3^2=9$

$\hookrightarrow$ Géométrie analytique, algébrique, ...

Mécanisme de vérification d'un calcul sans cause ni effet.

- **Méthode directe** (dite aussi **formelle** en informatique) qui consiste à démontrer la proposition en partant directement des hypothèses données et en arrivant à la conclusion par une suite d'implications logiques.

- **Méthode directe** (dite aussi **formelle** en informatique) qui consiste à démontrer la proposition en partant directement des hypothèses données et en arrivant à la conclusion par une suite d'implications logiques.

Exemple : "*Il n'existe pas d'entier n positif ou nul tel que le nombre* $\sqrt{n^2+7n+12}$ *soit un entier.*"

- **Méthode directe** (dite aussi **formelle** en informatique) qui consiste à démontrer la proposition en partant directement des hypothèses données et en arrivant à la conclusion par une suite d'implications logiques.

Exemple : "*Il n'existe pas d'entier n positif ou nul tel que le nombre* $\sqrt{n^2+7n+12}$ *soit un entier.*"

Preuve : $n^2+6n+9 < n^2+7n+12 < n^2+8n+16$

$$\Longrightarrow (n+3)^2 < n^2+7n+12 < (n+4)^2$$

$$\Longrightarrow \quad n+3 < \sqrt{n^2+7n+12} < n+4$$

- **Méthode directe** (dite aussi **formelle** en informatique) qui consiste à démontrer la proposition en partant directement des hypothèses données et en arrivant à la conclusion par une suite d'implications logiques.

Exemple : "*Il n'existe pas d'entier n positif ou nul tel que le nombre $\sqrt{n^2+7n+12}$ soit un entier.*"

Preuve :
$$\begin{aligned} & n^2+6n+9 < n^2+7n+12 < n^2+8n+16 \\ \Longrightarrow\ & (n+3)^2 < n^2+7n+12 < (n+4)^2 \\ \Longrightarrow\ & \quad n+3 < \sqrt{n^2+7n+12} < n+4 \end{aligned}$$

- **Méthode par l'absurde** qui consiste à supposer le contraire de la proposition énoncée pour aboutir à une contradiction (impossibilité).

- **Méthode directe** (dite aussi **formelle** en informatique) qui consiste à démontrer la proposition en partant directement des hypothèses données et en arrivant à la conclusion par une suite d'implications logiques.

Exemple : "*Il n'existe pas d'entier n positif ou nul tel que le nombre* $\sqrt{n^2+7n+12}$ *soit un entier.*"

Preuve : $n^2+6n+9 < n^2+7n+12 < n^2+8n+16$
$$\Longrightarrow (n+3)^2 < n^2+7n+12 < (n+4)^2$$
$$\Longrightarrow \quad n+3 < \sqrt{n^2+7n+12} < n+4$$

- **Méthode par l'absurde** qui consiste à supposer le contraire de la proposition énoncée pour aboutir à une contradiction (impossibilité).

- **Méthode par contraposée** : $P \Longrightarrow Q \quad \Longleftrightarrow \quad$ non $Q \Longrightarrow$ non $P$.

- **Méthode par récurrence** (ou induction). Soit $P(n)$ une propriété de l'entier $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que :

*a*. $P(0)$ est vraie (*ancrage*) ;

*b*. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ implique $P(n+1)$ (*hérédité*).

Alors la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n$.

- **Méthode par récurrence** (ou induction). Soit $P(n)$ une propriété de l'entier $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que :

*a*. $P(0)$ est vraie (*ancrage*) ;

*b*. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ implique $P(n+1)$ (*hérédité*).

Alors la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n$.

Exemple : "*pour tout entier n positif et pour tout nombre réel x positif, on a la propriété* $P(n) \equiv (1+x)^n \geq 1+nx$."

- **Méthode par récurrence** (ou induction). Soit $P(n)$ une propriété de l'entier $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que :

*a*. $P(0)$ est vraie (*ancrage*) ;

*b*. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ implique $P(n+1)$ (*hérédité*).

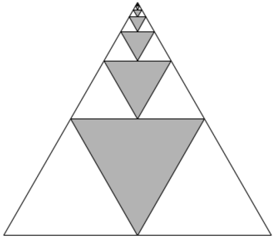
Alors la propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n$.

Exemple : "*pour tout entier n positif et pour tout nombre réel x positif, on a la propriété* $P(n) \equiv (1+x)^n \geq 1 + nx$."

Preuve : - Ancrage : $(1+x)^0 = 1 \geq 1 + 0x = 1$.

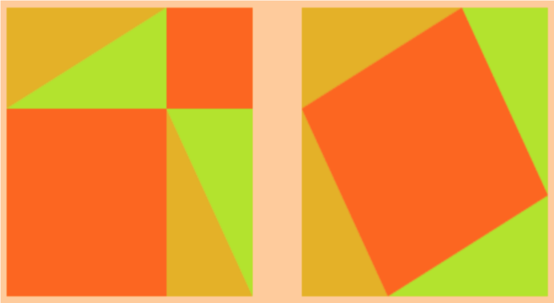
- Hérédité : Supposons $P(n)$. On multiplie $P(n)$ par $1+x$ ce qui donne $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$.
- Conclusion : on a $P(n+1)$, et donc $P(n)$ pour tout entier $n$.

- **Méthode sans mots**, par le dessin :



$$\frac{1}{3} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{4^i} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{4^5} \cdots$$

Série géométrique



Théorème de Pythagore

# Table des matières

1. Mise en place.
1.1. Quelques points de vocabulaire.
1.2. Différentes techniques de preuve.
1.3. Typologie des "preuves".

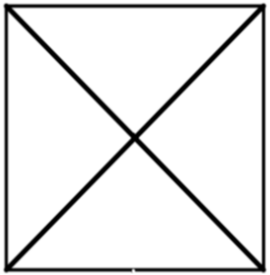
2. Deux preuves en géométrie du triangle.
2.1. Théorème des médiatrices.
2.1. Théorème de Thalès.

3. Le triangle curry.
3.1. Construction d'une preuve.
3.2. Vérification d'une preuve.
3.3. Epilogue.

## NAIF

**Théorème**

*Dans un polygone de n côtés, le nombre de diagonales est égal à $p_n = n(n-3)/2$.*



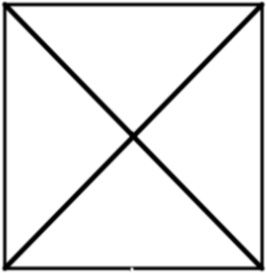
- L'**empirisme naïf** qui consiste à tirer de l'observation d'un cas (ou d'un petit nombre de cas) la certitude d'une assertion.

  Cas du carré (n= 4) : Il y a deux diagonales de sorte que $p_4 = 2$.

## NAIF

**Théorème**

*Dans un polygone de n côtés, le nombre de diagonales est égal à $p_n = n(n-3)/2$.*



- L'**empirisme naïf** qui consiste à tirer de l'observation d'un cas (ou d'un petit nombre de cas) la certitude d'une assertion.

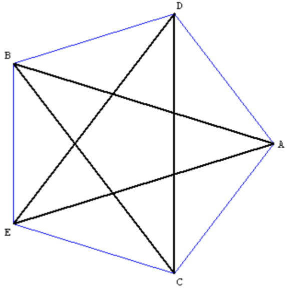
  Cas du carré (n= 4) : Il y a deux diagonales de sorte que $p_4 = 2$.

  On a bien $p_4 = 4(4-3)/2$. Mais de là à en tirer une règle générale ...

## PARIEUR

### Théorème

*Dans un polygone de n côtés, le nombre de diagonales est égal à $p_n = n(n-3)/2$.*

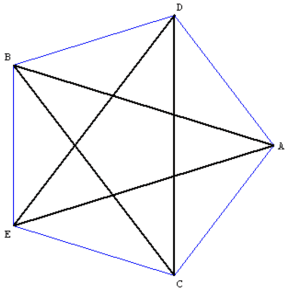



- L'**expérience cruciale** qui consiste à parier sur la réalisation d'un cas qu'on reconnait pour aussi peu particulier que possible.

## PARIEUR

**Théorème**

*Dans un polygone de n côtés, le nombre de diagonales est égal à $p_n = n(n-3)/2$.*



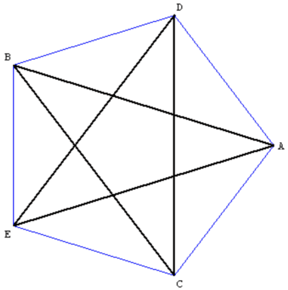

- L'**expérience cruciale** qui consiste à parier sur la réalisation d'un cas qu'on reconnait pour aussi peu particulier que possible.

  Cas du pentagone (n=5) : Il y a cinq diagonales de sorte que $p_5 = 5$.

## PARIEUR

**Théorème**

*Dans un polygone de n côtés, le nombre de diagonales est égal à $p_n = n(n-3)/2$.*




- L'**expérience cruciale** qui consiste à parier sur la réalisation d'un cas qu'on reconnait pour aussi peu particulier que possible.

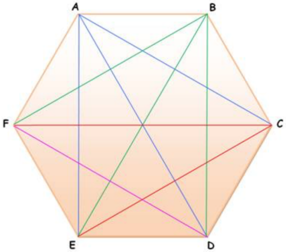
  Cas du pentagone (n=5) : Il y a cinq diagonales de sorte que $p_5 = 5$.

  On a bien $p_5 = 5(5-3)/2$. Mais alors pourquoi ne pas poser $p_n = n$ ?

## SCRUPULEUX

### Théorème

*Dans un polygone de $n$ côtés, le nombre de diagonales est égal à $p_n = n(n-3)/2$.*

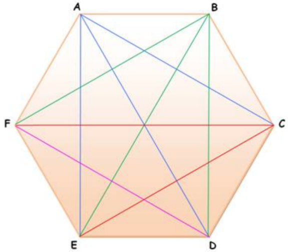



- L'**exemple générique** qui dégage les propriétés caractéristiques et les structures de la famille (les polygones) tous en restant très attaché à l'exhibition de l'un de ses représentants.

## SCRUPULEUX

**Théorème**

*Dans un polygone de n côtés, le nombre de diagonales est égal à $p_n = n(n-3)/2$.*



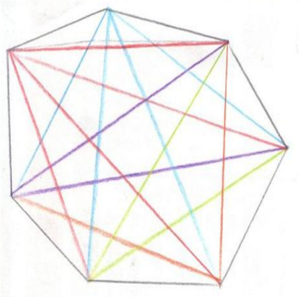

- L'**exemple générique** qui dégage les propriétés caractéristiques et les structures de la famille (les polygones) tous en restant très attaché à l'exhibition de l'un de ses représentants.

  Cas de l'hexagone (n=6) : Des 6 sommets, il part 3 diagonales. Au total, il part donc $6 \times 3 = 18$ diagonales. Mais chaque diagonale est comptée 2 fois. On obtient donc $p_6 = 18/2 = 9$. **De même**, $\cdots$

## MATHEMATICIEN

**Théorème**

*Dans un polygone de n côtés, le nombre de diagonales est égal à* $p_n = n(n-3)/2$.

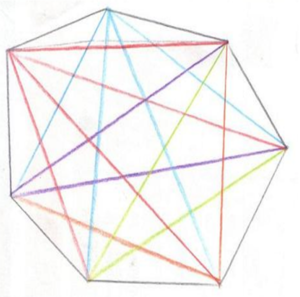


- L'**expérience mentale** qui invoque l'action en l'intériorisant et en la détachant de sa réalisation sur un représentant particulier.

## MATHEMATICIEN

**Théorème**

*Dans un polygone de n côtés, le nombre de diagonales est égal à $p_n = n(n-3)/2$.*



- L'**expérience mentale** qui invoque l'action en l'intériorisant et en la détachant de sa réalisation sur un représentant particulier.

  Cas général : Des $n$ sommets, il part $(n-3)$ diagonales. Au total, il part donc $n \times (n-3)$ diagonales. Mais comme chaque diagonale est comptée 2 fois. On obtient donc $p_n = n(n-3)/2$.

# Table des matières


1. Mise en place.
   - 1.1. Quelques points de vocabulaire.
   - 1.2. Différentes techniques de preuve.
   - 1.3. Typologie des "preuves".

2. Deux preuves en géométrie du triangle.
   - 2.1. Théorème des médiatrices.
   - 2.1. Théorème de Thalès.

3. Le triangle curry.
   - 3.1. Construction d'une preuve.
   - 3.2. Vérification d'une preuve.
   - 3.3. Epilogue.

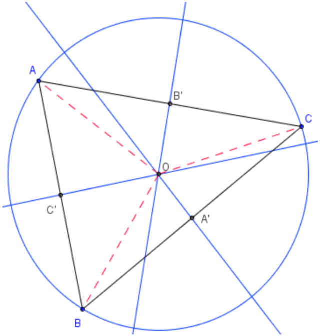
# Table des matières

1. Mise en place.
1.1. Quelques points de vocabulaire.
1.2. Différentes techniques de preuve.
1.3. Typologie des "preuves".
2. Deux preuves en géométrie du triangle.
2.1. Théorème des médiatrices.
2.1. Théorème de Thalès.
3. Le triangle curry.
3.1. Construction d'une preuve.
3.2. Vérification d'une preuve.
3.3. Epilogue.

## ↪ Raisonnement abstrait.

**Théorème**

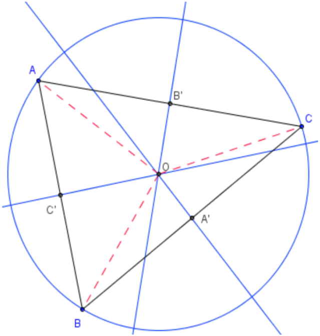
*Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes au même point, qui est le centre du cercle circonscrit au triangle.*



## $\hookrightarrow$ Raisonnement abstrait.

### Théorème

*Les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes au même point, qui est le centre du cercle circonscrit au triangle.*




Preuve. (6 èm) - Relation d'*équivalence* entre les trois longueurs des trois segments OA, OB et OC tracés en pointillés rouges (– – –)

# Table des matières

1. Mise en place.
   1.1. Quelques points de vocabulaire.
   1.2. Différentes techniques de preuve.
   1.3. Typologie des "preuves".

2. Deux preuves en géométrie du triangle.
   2.1. Théorème des médiatrices.
   2.1. Théorème de Thalès.

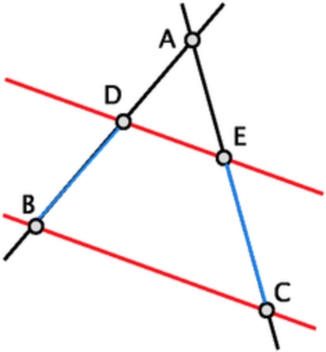
3. Le triangle curry.
   3.1. Construction d'une preuve.
   3.2. Vérification d'une preuve.
   3.3. Epilogue.

## $\hookrightarrow$ Raisonnement concret.

### Théorème (de Thalès)

*Soit un triangle ABC, et deux points D et E des droites (AB) et (AC) de sorte que la droite (DE) soit parallèle à la droite (BC). Alors on a :*

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}.$$

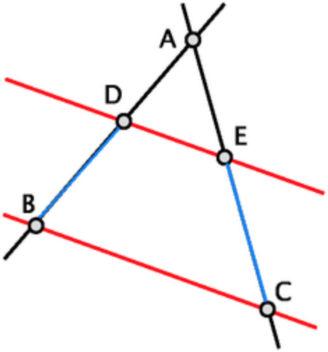


## $\hookrightarrow$ Raisonnement concret.

### Théorème (de Thalès)

*Soit un triangle ABC, et deux points D et E des droites (AB) et (AC) de sorte que la droite (DE) soit parallèle à la droite (BC). Alors on a :*

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}.$$




Preuve. - Math : Euclide avec la méthode des aires / calcul vectoriel ;
(3 èm) - Empirique, comme illustration du concept de *proportionnalité*.

# Table des matières

1. Mise en place.
   1.1. Quelques points de vocabulaire.
   1.2. Différentes techniques de preuve.
   1.3. Typologie des "preuves".

2. Deux preuves en géométrie du triangle.
   2.1. Théorème des médiatrices.
   2.1. Théorème de Thalès.

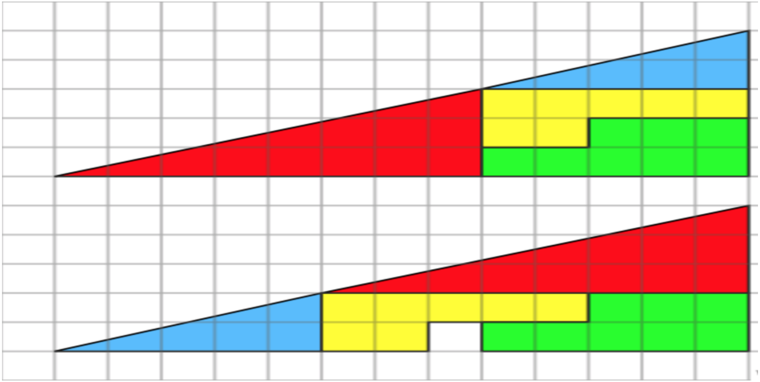
3. Le triangle curry.
   3.1. Construction d'une preuve.
   3.2. Vérification d'une preuve.
   3.3. Epilogue.

# Table des matières

1. Mise en place.
1.1. Quelques points de vocabulaire.
1.2. Différentes techniques de preuve.
1.3. Typologie des "preuves".

2. Deux preuves en géométrie du triangle.
2.1. Théorème des médiatrices.
2.1. Théorème de Thalès.

3. Le triangle curry.
3.1. Construction d'une preuve.
3.2. Vérification d'une preuve.
3.3. Epilogue.



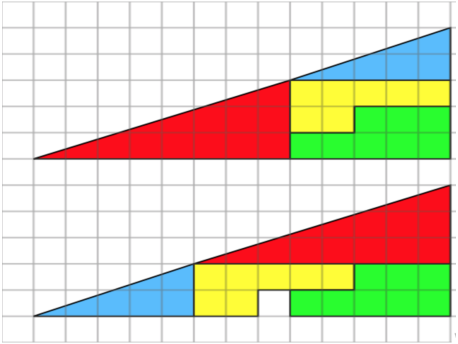
◁ Les deux figures sont identiques.

☐ Vrai ☐ Faux

◁ Les pièces du puzzle sont identiques.

☐ Vrai ☐ Faux

Prise de conscience de cette **contradiction** sur critères :

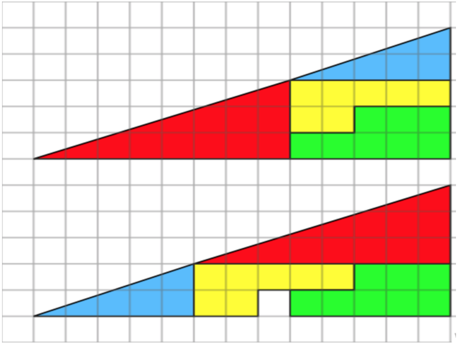


◁ Les deux figures sont identiques.

☐ Vrai ☐ Faux

◁ Les pièces du puzzle sont identiques.

☐ Vrai ☐ Faux



Prise de conscience de cette **contradiction** sur critères :

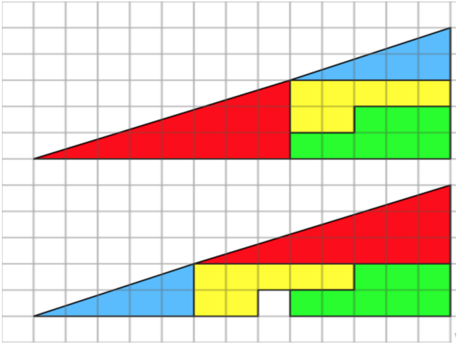
↪ *subjectifs* : dépend des exigences de la situation (risque encouru, désir de certitude, désir de savoir, ...)

◁ Les deux figures sont identiques.

☐ Vrai ☐ Faux

◁ Les pièces du puzzle sont identiques.

☐ Vrai ☐ Faux



Prise de conscience de cette **contradiction** sur critères :

↪ *subjectifs* : dépend des exigences de la situation (risque encouru, désir de certitude, désir de savoir, ...)

↪ *objectifs* : lié à des impératifs (historiques, politiques, industriels, ...).

3.1. Construction d'une preuve.

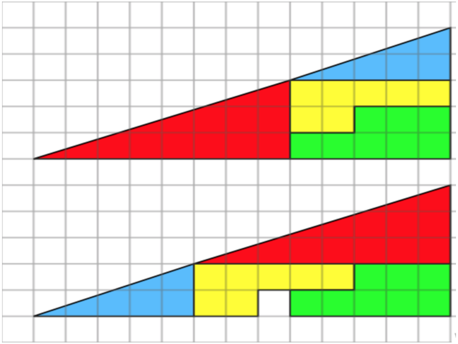
◁ Les deux figures sont identiques.

☐ Vrai ☐ Faux

◁ Les pièces du puzzle sont identiques.

☐ Vrai ☐ Faux

Prise de conscience de cette **contradiction** implique :

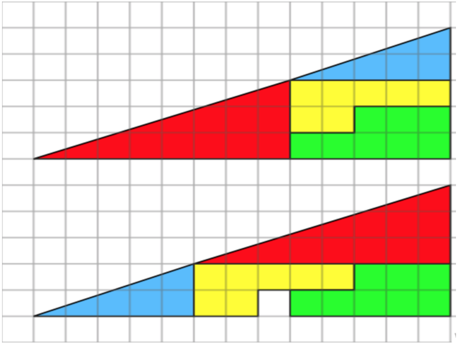


◁ Les deux figures sont identiques.

☐ Vrai ☐ Faux

◁ Les pièces du puzzle sont identiques.

☐ Vrai ☐ Faux



Prise de conscience de cette **contradiction** implique :

↪ un problème de choix entre les deux propositions (il s'agit de trier le Vrai du Faux, d'analyser le Pour et le Contre) ;

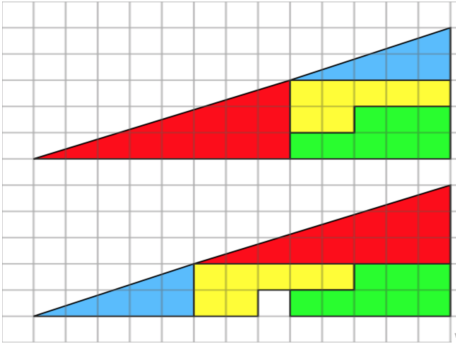
◁ Les deux figures sont identiques.

☐ Vrai ☐ Faux

◁ Les pièces du puzzle sont identiques.

☐ Vrai ☐ Faux

Prise de conscience de cette **contradiction** implique :



↪ un problème de choix entre les deux propositions (il s'agit de trier le Vrai du Faux, d'analyser le Pour et le Contre) ;

↪ une réorganisation des connaissances.

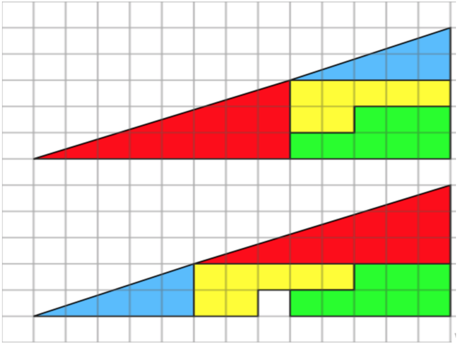
◁ Les deux figures sont identiques.

☐ Vrai ☐ Faux

◁ Les pièces du puzzle sont identiques.

☐ Vrai ☐ Faux

Production d'argumentations pour lever la **contradiction** :

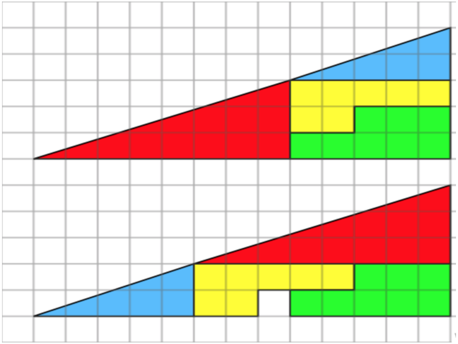


◁ Les deux figures sont identiques.

☐ Vrai ☐ Faux

◁ Les pièces du puzzle sont identiques.

☐ Vrai ☐ Faux



Production d'argumentations pour lever la **contradiction** :

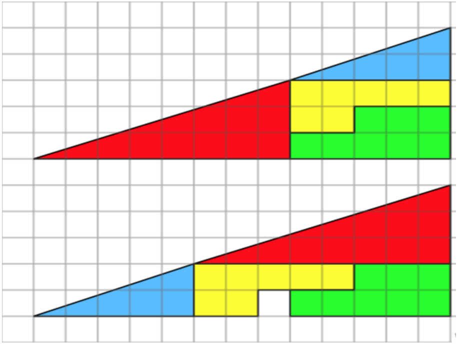
↪ preuves *pragmatiques* (sous réserve de l'accès à l'expérience) : je refais les dessins, je compte les carreaux et je vois ce qui cloche !

◁ Les deux figures sont identiques.

☐ Vrai ☐ Faux

◁ Les pièces du puzzle sont identiques.

☐ Vrai ☐ Faux



Production d'argumentations pour lever la **contradiction** :

↪ preuves *pragmatiques* (sous réserve de l'accès à l'expérience) :
je refais les dessins, je compte les carreaux et je vois ce qui cloche !

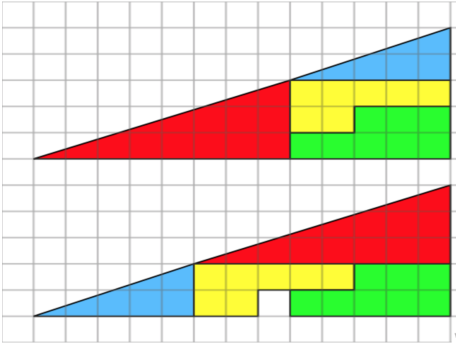
↪ preuves *intellectuelles*, reposant sur de la conceptualisation.

◁ Les deux figures sont identiques.

☐ Vrai ☐ Faux

◁ Les pièces du puzzle sont identiques.

☐ Vrai ☐ Faux



Production d'argumentations pour lever la **contradiction** :

↪ preuves *pragmatiques* portées par un *exemple générique*

⇓ évolution des moyens langagiers ⇓

↪ preuves *intellectuelles* issues de l'*expérience mentale*

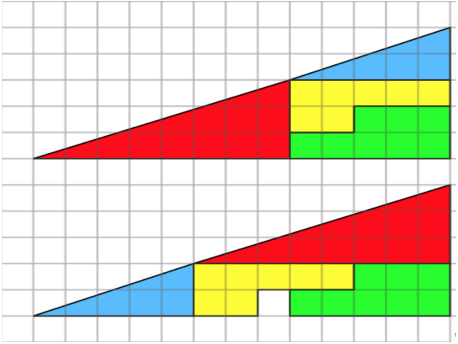
◁ Les deux figures sont identiques.

☐ Vrai ☐ Faux

◁ Les pièces du puzzle sont identiques.

☐ Vrai ☐ Faux

Production d'argumentations pour lever la **contradiction** :



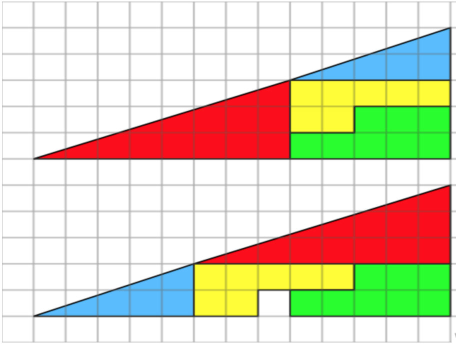
↪ langage *de la familiarité* qui ne connait "*que les cas particuliers et les détails de l'intérêt pratique ou de la curiosité anecdotique*, Bourdieu ;

◁ Les deux figures sont identiques.

☐ Vrai ☐ Faux

◁ Les pièces du puzzle sont identiques.

☐ Vrai ☐ Faux



Production d'argumentations pour lever la **contradiction** :

↪ langage *de la familiarité* qui ne connait "*que les cas particuliers et les détails de l'intérêt pratique ou de la curiosité anecdotique*, Bourdieu ;

↪ langage *fonctionnel* ou *symbolique*, formalisme du groupe Bourbaki.

Ce passage du langage *de la familiarité* au langage *symbolique* est en fait un passage de l'univers des *actions* à celui des *relations* et des *opérations*.

Ce passage du langage *de la familiarité* au langage *symbolique* est en fait un passage de l'univers des *actions* à celui des *relations* et des *opérations*.
**Science dure** (?) qui semble exiger :

- une dé(?)-contextualisation, c'est-à-dire l'abandon du dessin qui est le lieu effectif de la réalisation des actions pour accéder à la classe des objets représentés, ceci indépendamment des circonstances annexes de leur apparition ;

Ce passage du langage *de la familiarité* au langage *symbolique* est en fait un passage de l'univers des *actions* à celui des *relations* et des *opérations*.
**Science dure** (?) qui semble exiger :

- une dé(?)-contextualisation, c'est-à-dire l'abandon du dessin qui est le lieu effectif de la réalisation des actions pour accéder à la classe des objets représentés, ceci indépendamment des circonstances annexes de leur apparition ;

- une dé(?)-personalisation détachant l'action de celui qui la conduit ;

Ce passage du langage *de la familiarité* au langage *symbolique* est en fait un passage de l'univers des *actions* à celui des *relations* et des *opérations*. **Science dure** (?) qui semble exiger :

- une dé(?)-contextualisation, c'est-à-dire l'abandon du dessin qui est le lieu effectif de la réalisation des actions pour accéder à la classe des objets représentés, ceci indépendamment des circonstances annexes de leur apparition ;
- une dé(?)-personalisation détachant l'action de celui qui la conduit ;
- une dé(?)-temporalisation dégageant les opérations de leur date et durée.

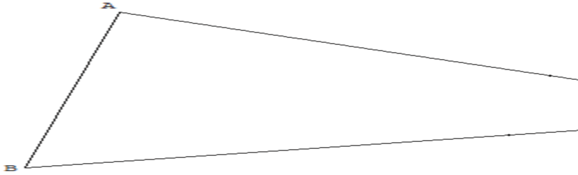
Ce passage du langage *de la familiarité* au langage *symbolique* est en fait un passage de l'univers des *actions* à celui des *relations* et des *opérations*.
**Science dure** (?) qui semble exiger :

- une dé(?)-contextualisation, c'est-à-dire l'abandon du dessin qui est le lieu effectif de la réalisation des actions pour accéder à la classe des objets représentés, ceci indépendamment des circonstances annexes de leur apparition ;
- une dé(?)-personalisation détachant l'action de celui qui la conduit ;
- une dé(?)-temporalisation dégageant les opérations de leur date et durée.

Exercice :

Calculer le **périmètre**

du triangle



La pratique de la démonstration exige à la fois :

↪ l'*adhésion* à une problématique qui n'est plus celle de l'*efficacité* (mue par une exigence pragmatique) mais celle de la *rigueur* (mue par une exigence théorique).

La pratique de la démonstration exige à la fois :

↪ l'*adhésion* à une problématique qui n'est plus celle de l'*efficacité* (mue par une exigence pragmatique) mais celle de la *rigueur* (mue par une exigence théorique).

↪ une *rationalité* et un état spécifique des connaissances ;

La pratique de la démonstration exige à la fois :

$\hookrightarrow$ l'*adhésion* à une problématique qui n'est plus celle de l'*efficacité* (mue par une exigence pragmatique) mais celle de la *rigueur* (mue par une exigence théorique).

$\hookrightarrow$ une *rationalité* et un état spécifique des connaissances ;

L'heuristique cherche son chemin :

$\hookrightarrow$ La découverte zigzague. Stimulée par les contre-exemples, elle va de la *conjecture* aux *prémisses* puis revient encore et encore jusqu'à voir apparaître le théorème.

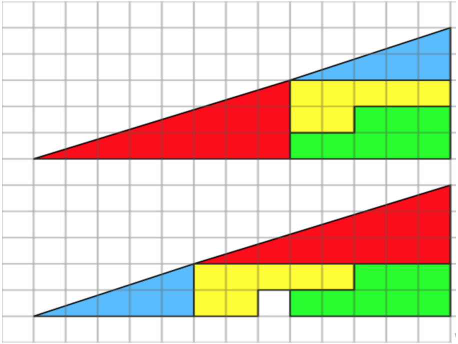
◅ Les deux figures sont identiques.

☐ Vrai ☐ Faux

◅ Les pièces du puzzle sont identiques.

☐ Vrai ☐ Faux

Interaction sociale dans le processus de **preuve** :

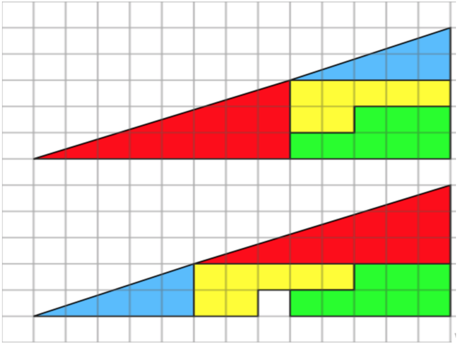


- Les deux figures sont identiques.

☐ Vrai ☐ Faux

- Les pièces du puzzle sont identiques.

☐ Vrai ☐ Faux



Interaction sociale dans le processus de **preuve** :

↪ *élaboration* et *mise en forme* des solutions ;

↪ *présentation* des solutions ;

↪ système de *validation*.

# Table des matières

1. Mise en place.
   1.1. Quelques points de vocabulaire.
   1.2. Différentes techniques de preuve.
   1.3. Typologie des "preuves".
2. Deux preuves en géométrie du triangle.
   2.1. Théorème des médiatrices.
   2.1. Théorème de Thalès.
3. Le triangle curry.
   3.1. Construction d'une preuve.
   3.2. Vérification d'une preuve.
   3.3. Epilogue.

Le **système de validation** se fait au travers de l'interaction sociale :

$\hookrightarrow$ *L'élaboration* et la *mise en forme* de solutions peut parfois s'appuyer sur des systèmes de connaissance non unifiés, recourir à des arguments non pertinents ou peu rigoureux. Par commodité ou par une économie de logique, on peut soutenir des énoncés qui sont faux ;

Le **système de validation** se fait au travers de l'interaction sociale :

$\hookrightarrow$ *L'élaboration* et la *mise en forme* de solutions peut parfois s'appuyer sur des systèmes de connaissance non unifiés, recourir à des arguments non pertinents ou peu rigoureux. Par commodité ou par une économie de logique, on peut soutenir des énoncés qui sont faux ;

$\hookrightarrow$ La *présentation* des solutions peut mobiliser des univers langagiers différents et des moyens divers (articles, colloques, YouTube, ...) ;

Le **système de validation** se fait au travers de l'interaction sociale :

↪ *L'élaboration* et la *mise en forme* de solutions peut parfois s'appuyer sur des systèmes de connaissance non unifiés, recourir à des arguments non pertinents ou peu rigoureux. Par commodité ou par une économie de logique, on peut soutenir des énoncés qui sont faux ;

↪ La *présentation* des solutions peut mobiliser des univers langagiers différents et des moyens divers (articles, colloques, YouTube, ...) ;

↪ Le système de *validation* fait référence aux propositions débattues.

Quelle est la fonction des preuves : - décider (s'insère dans l'action) ?
- convaincre (relève de la séduction) ?
- savoir (pour la connaissance) ?

Le **système de validation** se fait au travers de l'interaction sociale :

↪ *L'élaboration* et la *mise en forme* de solutions peut parfois s'appuyer sur des systèmes de connaissance non unifiés, recourir à des arguments non pertinents ou peu rigoureux. Par commodité ou par une économie de logique, on peut soutenir des énoncés qui sont faux ;

↪ La *présentation* des solutions peut mobiliser des univers langagiers différents et des moyens divers (articles, colloques, YouTube, ...) ;

↪ Le système de *validation* fait référence aux propositions débattues.

Quelle est la fonction des preuves : - décider (s'insère dans l'action) ?
- convaincre (relève de la séduction) ?
- savoir (pour la connaissance) ?

Et dans quel ordre ?

Le **système de validation** se fait au travers de l'interaction sociale :

Comment vérifier les preuves :
- par les pairs ?
- par des archives ouvertes évaluées ?
- par des ordinateurs ?

Le **système de validation** se fait au travers de l'interaction sociale :

Comment vérifier les preuves : - par les pairs ?
- par des archives ouvertes évaluées ?
- par des ordinateurs ?

Comment les réfuter : - Par un contre-exemple ?

Le **système de validation** se fait au travers de l'interaction sociale :

Comment vérifier les preuves : - par les pairs ?
- par des archives ouvertes évaluées ?
- par des ordinateurs ?

Comment les réfuter : - Par un contre-exemple ?

Quelle est la vitesse d'acceptation : - lente ?
- rapide ?

Le **système de validation** se fait au travers de l'interaction sociale :

Comment vérifier les preuves : - par les pairs ?
- par des archives ouvertes évaluées ?
- par des ordinateurs ?

Comment les réfuter : - Par un contre-exemple ?

Quelle est la vitesse d'acceptation : - lente ?
- rapide ?

Quelle est la portée des preuves : - locale (journée de l'UBO) ?
- internationale ?

Le **système de validation** se fait au travers de l'interaction sociale :

Comment vérifier les preuves : - par les pairs ?
- par des archives ouvertes évaluées ?
- par des ordinateurs ?

Comment les réfuter : - Par un contre-exemple ?

Quelle est la vitesse d'acceptation : - lente ?
- rapide ?

Quelle est la portée des preuves : - locale (journée de l'UBO) ?
- internationale ?

Comment récompenser les preuves : - par des prix (distinctions, ...) ?

Le **système de validation** se fait au travers de l'interaction sociale :

Comment vérifier les preuves : - par les pairs ?
- par des archives ouvertes évaluées ?
- par des ordinateurs ?

Comment les réfuter : - Par un contre-exemple ?

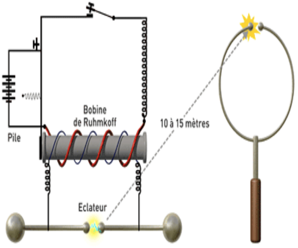
Quelle est la vitesse d'acceptation : - lente ?
- rapide ?

Quelle est la portée des preuves : - locale (journée de l'UBO) ?
- internationale ?

Comment récompenser les preuves : - par des prix (distinctions, ...) ?

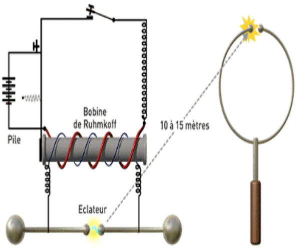
Comment en mesurer l'importance : - par les implications ?
- par la profondeur, la beauté ?

**Illustration par la physique**. L'expérience de H. Hertz (1854–1894)




| deux fois la distance entre deux noeuds | | fréquence d'émission | | vitesse de la lumière ($\simeq 3 \times 10^8$) |
|---|---|---|---|---|
| $2l$ | $\times$ | $\nu$ | $=$ | $V$ |

**Illustration par la physique**. Réfutation de H. Poincaré (1854–1912)




| deux fois la distance entre deux noeuds | | fréquence d'émission | | vitesse de la lumière ($\simeq 3 \times 10^8$) |
|---|---|---|---|---|
| $2l$ | $\times$ | $\sqrt{2} \times \nu$ | $=$ | $4,3 \times 10^8$ ! |

# La découverte en mathématiques

- **E. Galois** (1811-1832)
  Résolubilité des équations par radicaux

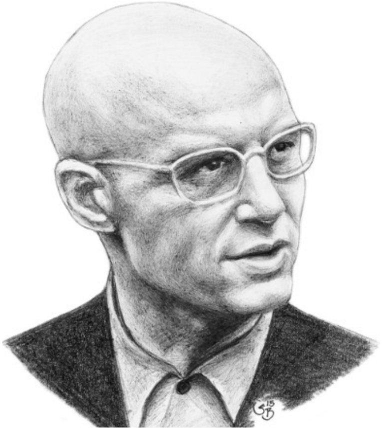
Lettre testamentaire où il demande de :

« *prier publiquement Jacobi ou Gauss de donner leur avis, non sur la vérité, mais sur l'importance de ses théorèmes* »

Lettre qui porte pour épitaphe :

« *Brillant éclat, dans l'effroi de la tempête, enveloppé à jamais de ténèbres* »

# L'activité de mathématicien



- **A. Grothendieck** (1928-2014)
  Fondateur de la géométrie algébrique

Extrait du livre *Récoltes et semailles* :

« *Je n'ai d'ailleurs jamais aimé lire des textes mathématiques, même ceux de toute beauté. Ma façon spontanée de comprendre des maths a toujours été de les faire, ou de les refaire* »

# La preuve comme consécration

- **G. Perelman** (1966-?)

  Démonstration de la conjecture de Poincaré (un des 7 pbs du millénaire)

Alternatives à propos de la médaille Fields :

« *accept and come; accept and don't come, and we will send you the medal later; third, I don't accept the prize. From the very beginning, I told him I have chosen the third one ... Everybody understood that if the proof is correct, then no other recognition is needed.* »

# Table des matières

1. Mise en place.
  1.1. Quelques points de vocabulaire.
  1.2. Différentes techniques de preuve.
  1.3. Typologie des "preuves".

2. Deux preuves en géométrie du triangle.
  2.1. Théorème des médiatrices.
  2.1. Théorème de Thalès.

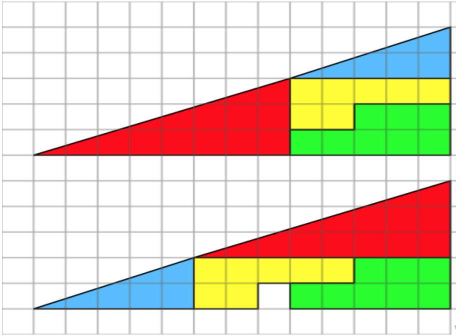
3. Le triangle curry.
  3.1. Construction d'une preuve.
  3.2. Vérification d'une preuve.
  3.3. Epilogue.

◁ Les deux figures sont identiques.

☐ Vrai ☒ Faux

◁ Les pièces du puzzle sont identiques.

☒ Vrai ☐ Faux

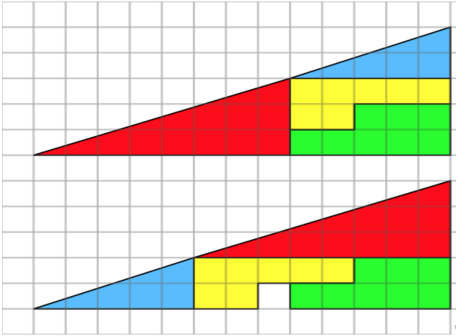


◁ Les deux figures sont identiques.

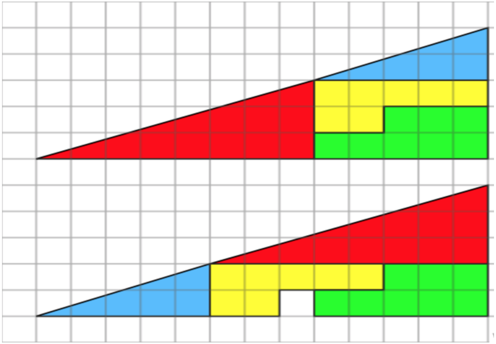
☐ Vrai ☒ Faux

◁ Les pièces du puzzle sont identiques.

☒ Vrai ☐ Faux



L'apparente contradiction vient juste d'une **illusion d'optique**.



**Merci pour votre écoute !**

# Quelques références

*Processus de preuve et situations de validation*, N. Balacheff, hal-01619264

*La preuve mathématique en tant qu'elle est épreuve de mémoire*, J. Dhombres, Communications 2009/1 (n° 84), pages 59 à 84

*Récoltes et semailles*, A. Grothendieck, 1985