Calculs de valeurs approchées d'intégrales

Dans cette annexe, on donne quatre méthodes d'approximation d'intégrales : la méthode des rectangles, la méthode des tangentes ou des rectangles médians, la méthode des trapèzes et la méthode de Simpson.
Au fur et à mesure, on impose des propriétés de plus en plus fortes à la fonction que l'on intègre et on gagne en précision sur la valeur approchée de l'intégrale que l'on obtient.

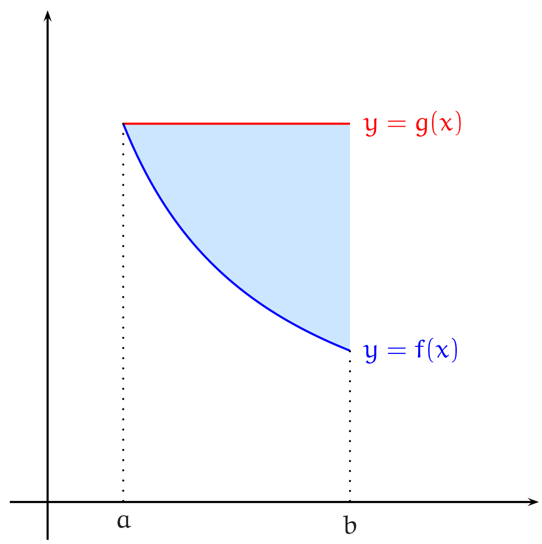
On se donne une fonction continue f sur un segment $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On découpe le segment $[a, b]$ en n segments ($n \in \mathbb{N}^*$) de même longueur en posant :

$$\forall k \in [\![0, n]\!],\ x_k = a + k\frac{b-a}{n} = a + kh \text{ où } h = \frac{b-a}{n}.$$

1) Méthode des rectangles

a) Préparation

On commence par se donner une fonction f de classe C^1 sur un segment $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On approche f par la fonction constante $g\ :\ x \mapsto f(a)$.



On veut évaluer l'erreur $\mathcal{E} = \int_a^b f(x)\ dx - \int_a^b g(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx - (b-a)f(a)$. Puisque f est de classe C^1 sur le segment $[a, b]$, on peut effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\ dx - (b-a)f(a) &= \int_a^b f(x)\ dx - \int_a^b f(a)\ dx = \int_a^b 1 \times (f(x) - f(a))\ dx \\ &= [(x-b)(f(x)-f(a))]_a^b - \int_a^b (x-b)f'(x)\ dx = -\int_a^b (x-b)f'(x)\ dx = \int_a^b (b-x)f'(x)\ dx.\end{aligned}$$

Dans l'intégration par parties, on a choisi la fonction $x \mapsto x - b$ pour primitive de la fonction $x \mapsto 1$. Ce choix a pour effet de faire disparaître le crochet et donc de faire disparaître f pour ne plus laisser apparent que f'. Il est clair graphiquement que l'erreur $\mathcal{E}$ n'est en fait fonction que de la taille de $|f'|$: « plus $|f'|$ est grand et plus f s'écarte d'une fonction constante ».

La fonction f est de classe C^1 sur le segment $[a, b]$ et en particulier, la fonction f' est bornée sur ce segment. Soit M_1 un majorant de la fonction $|f'|$ sur le segment $[a, b]$.

$$\begin{aligned}|\mathcal{E}| &= \left|\int_a^b f(x)\ dx - (b-a)f(a)\right| = \left|\int_a^b (b-x)f'(x)\ dx\right| \\ &\leqslant \int_a^b |b-x||f'(x)|\ dx = \int_a^b (b-x)|f'(x)|\ dx \leqslant M_1 \int_a^b (b-x)\ dx \\ &= M_1\left[-\frac{(b-x)^2}{2}\right]_a^b = \frac{M_1(b-a)^2}{2} \quad \text{(I)}.\end{aligned}$$

On note que l'inégalité obtenue, valable pour toute fonction f de classe C^1 sur $[a, b]$, ne peut être améliorée. En effet, si f est la fonction affine $x \mapsto x - a$, alors $M_1 = 1$ convient puis

$$\left|\int_a^b f(x)\ dx - (b-a)f(a)\right| = \left|\int_a^b (x-a)\ dx\right| = \left|\left[\frac{(x-a)^2}{2}\right]_a^b\right| = \frac{(b-a)^2}{2} = \frac{M_1(b-a)^2}{2}.$$

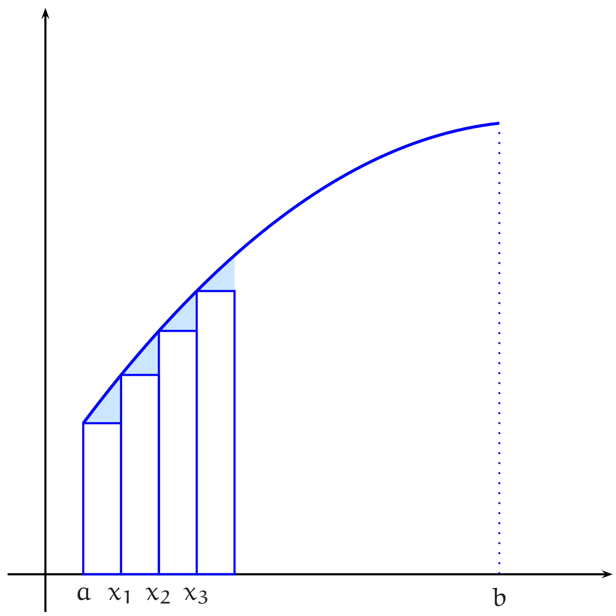
Pour ce choix de f, l'inégalité (I) est une égalité.

b) Evaluation de l'erreur dans la méthode des rectangles

On découpe $[a, b]$ en n segments, $n \in \mathbb{N}^*$, de même longueur : $[x_0, x_1]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$. On pose :

$$S_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) f(x_k) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

On veut une évaluation de l'erreur : $\left|\int_a^b f(x)\ dx - S_n(f)\right|$.



On applique l'inégalité (I) du a) sur chaque segment $[x_k, x_{k+1}]$ et on obtient :

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)\ dx - S_n(f)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\ dx - (x_{k+1} - x_k) f(x_k)\right)\right| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\ dx - (x_{k+1} - x_k) f(x_k)\right| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{M_1 (x_{k+1} - x_k)^2}{2} = n \times \frac{M_1}{2}\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \\
&= \frac{M_1(b-a)^2}{2n}.
\end{aligned}$$

Donc :

Soit f une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit M_1 un majorant de $|f'|$ sur $[a, b]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\int_a^b f(x)\ dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right| \leqslant \frac{M_1(b-a)^2}{2n}.$

Ainsi, pour une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$, la méthode des rectangles fournit une valeur approchée avec une erreur qui un $O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exemple. On veut une valeur approchée à 10^{-1} près de $I = \int_0^1 e^{x^2}\, dx$. Ici, on a donc $a = 0$ et $b = 1$ puis $b - a = 1$. Ensuite, pour $x \in [0, 1]$, $f(x) = e^{x^2}$ puis $f'(x) = 2xe^{x^2}$. La fonction f' est croissante sur $[0, 1]$ en tant que produit de fonctions positives et croissantes sur $[0, 1]$. Par suite, pour $x \in [0, 1]$, $|f'(x)| = f'(x) \leqslant f'(1) = 2e$. Donc, $M_1 = 2e$ convient. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left| I - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k^2}{n^2}} \right| \leqslant \frac{e}{n}.$$

On pose $S_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{k^2}{n^2}}$. On choisit n_0 tel que $\frac{e}{n_0} \leqslant \frac{10^{-1}}{2}$. On prend par exemple $n_0 = 55$. Une valeur approchée de $S_{n_0}(f)$ à $\frac{10^{-1}}{2}$ près est une valeur approchée de I à 10^{-1} près.

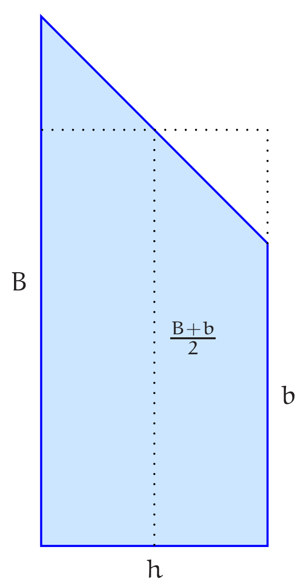
La calculatrice fournit $S_{55}(f) = \frac{1}{55}\sum_{k=0}^{54} e^{\frac{k^2}{55^2}} = 1,4$ arrondi à 10^{-1} et donc

$$\int_0^1 e^{x^2}\, dx = 1,4 \text{ à } 10^{-1} \text{ près.}$$

2) Méthode des rectangles médians ou méthode des tangentes

a) Préparation.

On connaît l'aire d'un trapèze rectangle : c'est l'aire d'un rectangle de côtés $\frac{\text{« petite base »} + \text{« grande base »}}{2}$ et « hauteur ».



$$\mathcal{A} = \frac{(B+b)h}{2}$$

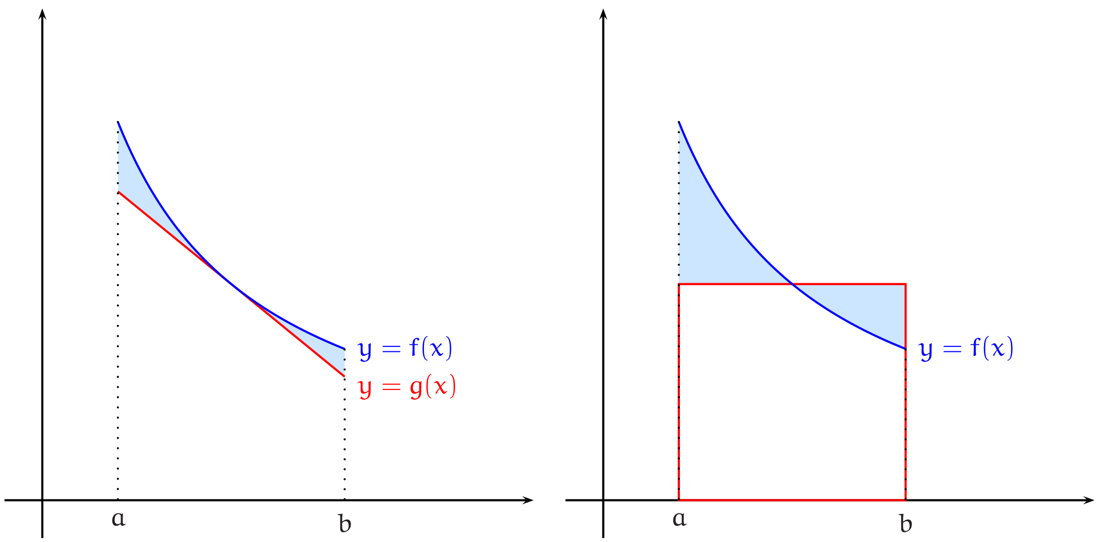
Plus généralement, si $g : x \mapsto \alpha x + \beta$ est une fonction affine sur un segment $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}
\int_a^b g(x)\, dx &= \int_a^b (\alpha x + \beta)\, dx = \left[\alpha\frac{x^2}{2} + \beta x\right]_a^b \\
&= \alpha\frac{b^2 - a^2}{2} + \beta(b - a) = (b - a)\left(\alpha\left(\frac{a + b}{2}\right) + \beta\right) \\
&= (b - a)g\left(\frac{a + b}{2}\right).
\end{aligned}$$

On suppose maintenant que f est de classe C^2 sur $[a,b]$. On note M_2 un majorant de la fonction $|f''|$ sur le segment $[a,b]$. On note g la fonction affine dont le graphe est la tangente au graphe de f en son point d'abscisse $\dfrac{a+b}{2}$: pour tout x de $[a,b]$, $g(x) = f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) + f'\left(\dfrac{a+b}{2}\right)\left(x - \dfrac{a+b}{2}\right)$. D'après ce qui précède,

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\ dx = \int_a^b f(x)\ dx - (b-a)g\left(\frac{a+b}{2}\right) = \int_a^b f(x)\ dx - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Si f est à valeurs réelles positives, $(b-a)f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ est aussi l'aire du « rectangle médian » :



D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange,

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f(x)\ dx - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| &= \left|\int_a^b \left(f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\right)\ dx\right| \\
&\leqslant \int_a^b \left|f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\right|\ dx \\
&\leqslant \int_a^b \frac{M_2\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2}{2}\ dx \\
&= \frac{M_2}{6}\left[\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^3\right]_a^b = \frac{M_2}{6}\left(\left(b - \frac{a+b}{2}\right)^3 - \left(a - \frac{a+b}{2}\right)^3\right) \\
&= \frac{M_2}{6} \times 2\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 = \frac{M_2(b-a)^3}{24}.
\end{aligned}$$

On note que cette inégalité ne peut pas être améliorée. Si on prend pour f la fonction $x \mapsto \left(x - \dfrac{a+b}{2}\right)^2$, alors $M_2 = 2$ convient puis

$$\left|\int_a^b f(x)\ dx - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| = \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2\ dx = \frac{2}{3}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 = \frac{M_2(b-a)^3}{24}.$$

b) Evaluation de l'erreur dans la méthode des rectangles médians

On pose

$$T_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k)\, f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right).$$

On applique l'inégalité précédente à chacun des intervalles $[x_k, x_{k+1}]$:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - T_n(f)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx - (x_{k+1}-x_k)\,f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)\right| \leqslant n\times\frac{M_2((b-a)/n)^3}{24} = \frac{M_2(b-a)^3}{24n^2}.$$

Finalement, en notant que $\dfrac{x_k+x_{k+1}}{2} = \dfrac{1}{2}\left(a+k\dfrac{b-a}{n}+a+(k+1)\dfrac{b-a}{n}\right) = a+\dfrac{(2k+1)(b-a)}{2n}$,

Soit f une fonction de classe C^2 sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit M_2 un majorant de la fonction $|f''|$ sur $[a,b]$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{(2k+1)(b-a)}{2n}\right)\right| \leqslant \dfrac{M_2(b-a)^3}{24n^2}$.

Cette fois-ci, l'erreur est un $O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

Exemple. On reprend l'exemple de $I=\displaystyle\int_0^1 e^{x^2}\,dx$. On veut une valeur approchée de I à 10^{-2} près. Pour $x\in[0,1]$, $f(x)=e^{x^2}$, $f'(x)=2xe^{x^2}$ puis $f''(x)=2\left(2x^2+1\right)e^{x^2}$ puis on peut prendre $M_2=6e$. Donc,

$$\left|I-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{(2k+1)^2}{4n^2}}\right| \leqslant \frac{e}{4n^2}.$$

Ensuite, $\dfrac{e}{4n^2}\leqslant\dfrac{10^{-2}}{2}\Leftarrow n\geqslant\sqrt{50e}\Leftarrow n\geqslant 12$. Une valeur approchée à $\dfrac{10^{-2}}{2}$ près de $S_{12}(f)=\dfrac{1}{12}\displaystyle\sum_{k=0}^{11} e^{\frac{(2k+1)^2}{576}}$ est une valeur approchée de I à 10^{-2} près. La calculatrice fournit $S_{12}(f)=1,461\ldots$ et donc $S_{12}(f)=1,46$ à $\dfrac{10^{-2}}{2}$ près puis

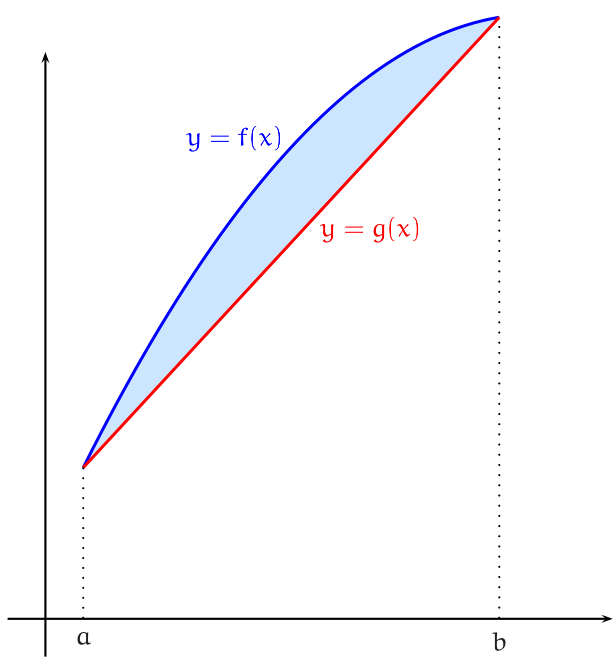
$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx = 1,46 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

3) Méthode des trapèzes

a) Préparation.

On approche f par la fonction affine g qui prend les mêmes valeurs que f en a et b :

$$\forall x\in[a,b],\ g(x)=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$



On reprend le calcul du 2)a). Puisque g est affine, $g\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$ est le milieu du segment $[g(a), g(b)]$ et donc

$$\int_a^b g(x)\ dx = (b-a)g\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{(b-a)(g(a)+g(b))}{2} = \frac{(b-a)(f(a)+f(b))}{2}.$$

On suppose de nouveau f de classe C^2 sur $[a, b]$ et on note M_2 un majorant de la fonction $|f''|$ sur $[a, b]$. On veut évaluer l'erreur

$$\mathcal{E} = \left|\int_a^b f(x)\ dx - \frac{(b-a)(f(a)+f(b))}{2}\right| = \left|\int_a^b (f(x)-g(x))\ dx\right|.$$

Une double intégration par parties fournit (on prendra comme « double primitive » de $x \mapsto 1$ le trinôme du second degré qui s'annule en a et b) :

$$\begin{aligned}
\int_a^b (f(x)-g(x))\ dx &= \left[\left(x-\frac{a+b}{2}\right)(f(x)-g(x))\right]_a^b - \int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left(f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right) dx \\
&= -\int_a^b \left(x-\frac{a+b}{2}\right)\left(f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right) dx \text{ (car } fg(a)=f(a) \text{ et } g(b)=f(b)) \\
&= -\left[\frac{(x-a)(x-b)}{2}\left(f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)\right]_a^b + \frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)\ dx \\
&= \frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)\ dx
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
|\mathcal{E}| &= \left|\int_a^b (f(x)-g(x))\ dx\right| = \left|\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)\ dx\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(b-x)|f''(x)|\ dx \leqslant \frac{M_2}{2}\int_a^b \left(-x^2+(a+b)x-ab\right) dx \\
&= \frac{M_2}{2}\left(-\frac{b^3-a^3}{3}+(a+b)\frac{b^2-a^2}{2}-ab(b-a)\right) \\
&= \frac{M_2(b-a)}{12}\left(-2\left(a^2+ab+b^2\right)+3(a+b)^2-6ab\right) = \frac{M_2(b-a)}{12}\left(a^2-2ab+b^2\right) \\
&= \frac{M_2(b-a)^3}{12}.
\end{aligned}$$

On note de nouveau que l'inégalité obtenue est la meilleure possible. En effet, si on prend pour f la fonction $x \mapsto x^2$, on peut prendre $M_2 = 2$ puis

$$\left|\frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)\ dx\right| = \frac{M_2}{2}\int_a^b (x-a)(b-x)\ dx = \frac{M_2(b-a)^3}{12}.$$

b) Evaluation de l'erreur dans la méthode des trapèzes.

On pose $U_n(f) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x_{k+1}-x_k)\left(f\left(x_k\right)+f\left(x_{k+1}\right)\right)}{2}$. On a

$$U_n(f) = \frac{b-a}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} f\left(x_k\right) + \sum_{k=0}^{n-1} f\left(x_{k+1}\right)\right) = \frac{b-a}{2n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} f\left(x_k\right) + \sum_{k=1}^{n} f\left(x_k\right)\right) = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(x_k\right)\right).$$

On applique ce qui précède à chaque intervalle $[x_k, x_{k+1}]$:

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,dx - U_n(f)\right| &= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx - \frac{(x_{k+1}-x_k)\left(f(x_k)+f(x_{k+1})\right)}{2}\right)\right|\\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx - \frac{(x_{k+1}-x_k)\left(f(x_k)+f(x_{k+1})\right)}{2}\right|\\ &\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\frac{M_2\left(x_{k+1}-x_k\right)^3}{12} = \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}.\end{aligned}$$

Soit f une fonction de classe C^2 sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit M_2 un majorant de la fonction $|f''|$ sur $[a,b]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\right)\right| \leqslant \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2}$.

De nouveau, l'erreur est un $O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. La méthode des trapèzes et la méthode des rectangles médians sont deux méthodes voisines.

Exemple. On reprend l'exemple de $I = \displaystyle\int_0^1 e^{x^2}\,dx$. On veut une valeur approchée de I à 10^{-2} près. Pour $x \in [0,1]$, $f(x) = e^{x^2}$, $f'(x) = 2xe^{x^2}$ puis $f''(x) = 2\left(2x^2+1\right)e^{x^2}$ puis on peut prendre $M_2 = 6e$. Donc,

$$\left|I - \frac{1}{n}\left(\frac{1+e}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} e^{\frac{k^2}{n^2}}\right)\right| \leqslant \frac{e}{2n^2}.$$

Ensuite, $\dfrac{e}{2n^2} \leqslant \dfrac{10^{-2}}{2} \Leftarrow n \geqslant \sqrt{100e} \Leftarrow n \geqslant 17$. Une valeur approchée à $\dfrac{10^{-2}}{2}$ près de $S_{17}(f) = \dfrac{1}{17}\left(\dfrac{1+e}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{16} e^{\frac{k^2}{17^2}}\right)$ est une valeur approchée de I à 10^{-2} près. La calculatrice fournit de nouveau

$$\int_0^1 e^{x^2}\,dx = 1,46 \text{ à } 10^{-2} \text{ près.}$$

4) Méthode de Simpson

a) Préparation

On approche cette fois-ci la fonction f par le polynôme g de degré inférieur ou égal à 2 qui prend les mêmes valeurs que f en a, $\dfrac{a+b}{2}$ et b (polynôme d'interpolation de Lagrange). Posons $g(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.

$$\begin{aligned}\int_a^b g(x)\,dx &= \alpha\left(\frac{b^3-a^3}{3}\right) + \beta\left(\frac{b^2-a^2}{2}\right) + \gamma(b-a) = \frac{b-a}{6}\left(2\alpha\left(a^2+ab+b^2\right) + 3\beta(a+b) + 6\gamma\right)\\ &= \frac{b-a}{6}\left(\left(\alpha a^2+\beta a+\gamma\right) + \left(\alpha b^2+\beta b+\gamma\right) + \alpha\left(a^2+2ab+b^2\right) + 2\beta(a+b) + 4\gamma\right)\\ &= \frac{b-a}{6}\left(\left(\alpha a^2+\beta a+\gamma\right) + \left(\alpha b^2+\beta b+\gamma\right) + 4\alpha\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + 4\beta\left(\frac{a+b}{2}\right) + 4\gamma\right)\\ &= \frac{b-a}{6}\left(g(a) + g(b) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) = \frac{b-a}{6}\left(f(a)+f(b)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right).\end{aligned}$$

En résumé,

$$\int_a^b g(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right).$$

On analyse maintenant l'expression $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$. Pour cela, on note F une primitive de f sur $[a,b]$, on pose $\alpha = \dfrac{a+b}{2}$ et pour $x \in \left[0, \dfrac{b-a}{2}\right]$, on pose

$$\varphi(x) = F(\alpha + x) - F(\alpha + x) - \frac{2x}{6}\left(f(\alpha - x) + 4f(\alpha) + f(\alpha + x)\right),$$

de sorte que $\varphi(0) = 0$, $\varphi\left(\dfrac{b-a}{2}\right) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$ et pour tout $x \in \left[0, \dfrac{b-a}{2}\right]$, $\alpha - x$ et $\alpha + x$ sont dans $[a, b]$.

On suppose f de classe suffisante pour effectuer les calculs qui suivent. Pour $x \in [a, b]$, on a

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= f(\alpha + x) + f(\alpha - x) - \frac{1}{3}\left(f(\alpha - x) + 4f(\alpha) + f(\alpha + x)\right) - \frac{x}{3}\left(-f'(\alpha - x) + f'(\alpha + x)\right)\\ &= \frac{2}{3}\left(f(\alpha - x) + f(\alpha + x)\right) - \frac{4}{3}f(\alpha) - \frac{x}{3}\left(-f'(\alpha - x) + f'(\alpha + x)\right)\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}\varphi''(x) &= \frac{2}{3}\left(-f'(\alpha - x) + f'(\alpha + x)\right) - \frac{1}{3}\left(-f'(\alpha - x) + f'(\alpha + x)\right) - \frac{x}{3}\left(f''(\alpha - x) + f''(\alpha + x)\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(-f'(\alpha - x) + f'(\alpha + x)\right) - \frac{x}{3}\left(f''(\alpha - x) + f''(\alpha + x)\right)\end{aligned}$$

et enfin,

$$\begin{aligned}\varphi^{(3)}(x) &= \frac{1}{3}\left(f''(\alpha - x) + f''(\alpha + x)\right) - \frac{1}{3}\left(f''(\alpha - x) + f''(\alpha + x)\right) - \frac{x}{3}\left(-f^{(3)}(\alpha - x) + f^{(3)}(\alpha + x)\right)\\ &= -\frac{x}{3}\left(-f^{(3)}(\alpha - x) + f^{(3)}(\alpha + x)\right).\end{aligned}$$

On suppose maintenant f de classe C^4 sur $[a, b]$. On note M_4 un majorant le fonction $\left|f^{(4)}\right|$ sur $[a, b]$. $f^{(3)}$ est de classe C^1 sur $[a, b]$ et $\left|\left(f^{(3)}\right)'\right| = \left|f^{(4)}\right|$ est majorée par M_4 sur $[a, b]$. L'inégalité des accroissements finis montre que pour tout x de $\left[0, \dfrac{b-a}{2}\right]$,

$$\left|\varphi^{(3)}(x)\right| \leqslant \frac{x}{3} \times M_4\left((\alpha + x) - (\alpha - x)\right) = \frac{2M_4x^2}{3}.$$

Ensuite, en tenant compte de $\varphi''(0) = \varphi'(0) = \varphi(0) = 0$,

$$|\varphi''(x)| = |\varphi''(x) - \varphi''(0)| = \left|\int_0^x \varphi^{(3)}(t)\,dt\right| \leqslant \frac{2M_4}{3}\int_0^x t^2\,dt = \frac{2M_4x^3}{9},$$

puis

$$|\varphi'(x)| = \left|\int_0^x \varphi''(t)\,dt\right| \leqslant \frac{2M_4}{9}\int_0^x t^3\,dt = \frac{M_4x^4}{18}$$

et enfin,

$$|\varphi(x)| = \left|\int_0^x \varphi'(t)\,dt\right| \leqslant \frac{M_4}{18}\int_0^x t^4\,dt = \frac{M_4x^5}{90}.$$

En particulier,

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{6}\left(f(a) + f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)\right| = \left|\varphi\left(\frac{b-a}{2}\right)\right| \leqslant \frac{M_4((b-a)/2)^5}{90} = \frac{M_4(b-a)^5}{2880}.$$

b) Evaluation de l'erreur dans la méthode de SIMSON

Comme dans les paragraphes précédents, on applique l'inégalité ci-dessus sur chacun des intervalles $[x_k, x_{k+1}]$ et on obtient :

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f(x)\ dx - \frac{b-a}{6n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(x_k\right)+4f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)+f\left(x_{k+1}\right)\right)\right| \\
&\qquad = \left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\ dx - \frac{x_{k+1}-x_k}{6}\left(f\left(x_k\right)+4f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)+f\left(x_{k+1}\right)\right)\right)\right| \\
&\qquad \leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\ dx - \frac{x_{k+1}-x_k}{6}\left(f\left(x_k\right)+4f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)+f\left(x_{k+1}\right)\right)\right| \\
&\qquad = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{M_4(b-a)^5}{2880n^5} = \frac{M_4(b-a)^5}{2880n^4}.
\end{aligned}
$$

Soit f une fonction de classe C^4 sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit M_4 un majorant de la fonction $\left|f^{(4)}\right|$ sur $[a,b]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\ dx - \frac{b-a}{6n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(x_k\right)+4f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)+f\left(x_{k+1}\right)\right)\right| \leqslant \frac{M_4(b-a)^5}{2880n^4}$.

Dans cette méthode, l'erreur est un $O\left(\dfrac{1}{n^4}\right)$.

Exemple. On reprend l'exemple de $I = \displaystyle\int_0^1 e^{x^2}\ dx$. On veut une valeur approchée de I à 10^{-3} près. Pour $x \in [0,1]$, $f(x) = e^{x^2}$, $f'(x) = 2xe^{x^2}$ puis $f''(x) = 2\left(2x^2+1\right)e^{x^2}$ puis $f^{(3)}(x) = \left(8x^3+12x\right)e^{x^2}$ puis $f^{(4)}(x) = \left(16x^4+48x^2+12\right)e^{x^2}$ et on peut prendre $M_4 = 76e$. Donc,

$$\left|I - \frac{1}{6n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(f\left(x_k\right)+4f\left(\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\right)+f\left(x_{k+1}\right)\right)\right| \leqslant \frac{76e}{2880n^4}.$$

Ensuite, $\dfrac{76e}{2880n^4} \leqslant \dfrac{10^{-2}}{2} \Leftarrow n \geqslant \sqrt[4]{\dfrac{475e}{90}} \Leftarrow n \geqslant 2$. Une valeur approchée à $\dfrac{10^{-3}}{2}$ près de

$$
\begin{aligned}
V_2(f) &= \frac{1}{22}\left(\sum_{k=0}^{1}\left(e^{\frac{k^2}{2^2}}+4e^{\frac{(2k+1)^2}{4^2}}+e^{\frac{(k+1)^2}{2^2}}\right)\right) \\
&= \frac{1}{12}\left(e^0+4e^{\frac{1}{16}}+e^{\frac{1}{4}}+e^{\frac{1}{4}}+4e^{\frac{9}{16}}+e^1\right),
\end{aligned}
$$

est une valeur approchée de I à 10^{-3} près. La calculatrice fournit $V_2(f) = 1,4637\ldots$ et donc

$$\int_0^1 e^{x^2}\ dx = 1,464 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

