Feuille 3

Exercice 1. Calculer les intégrales généralisées suivantes

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)}\,dx \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx \quad \int_0^{+\infty} xe^{-2x}\,dx \quad \int_0^{+\infty} (x^2-3)e^{-x}\,dx$$

Exercice 2. Etudier la convergence des intégrales généralisées suivantes

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{x}e^{-x}\,dx,\ \int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2+1}\,dx,\ \int_0^{+\infty} \frac{xe^{-\sqrt{x}}}{x^2+1}\,dx,\ \int_0^{1} \frac{\ln(x)}{\sqrt{(1-x)^3}}\,dx.$$

Exercice 3. *(Lois exponentielles)* Soit λ un nombre strictement positif. Montrer que les trois intégrales suivantes convergent et les calculer

$$\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx,\ \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\,dx,\ \int_0^{+\infty} \lambda(x-\frac{1}{\lambda})^2 e^{-\lambda x}\,dx.$$

Exercice 4. *(Lois normales)* Soient μ un nombre réel et σ un nombre strictement positif.

1. Montrer que l'intégrale
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx$$
est convergente.
2. On admet que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \sqrt{2\pi}$$
Après avoir justifier leurs convergences, calculer les trois intégrales suivantes
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx,\ \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx,\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^2e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,dx.$$
3. Après avoir justifier leurs convergences, calculer les trois intégrales suivantes
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\frac{dx}{\sqrt{2\pi}\sigma},\ \int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\frac{dx}{\sqrt{2\pi}\sigma},\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\frac{dx}{\sqrt{2\pi}\sigma}.$$

Exercice 5. Soit T un nombre strictement positif. Montrer que l'intégrale

$$\int_T^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

converge et que

$$\int_T^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \leq \frac{e^{-\frac{T^2}{2}}}{T}.$$

Exercice 6. Pour chacune des intégrales indiquées ci-dessous, préciser s'il s'agit d'une intégrale généralisée ou d'une intégrale de Riemann ; étudier la nature des intégrales généralisées (convergence absolue, convergence, divergence).

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,dx \quad \int_0^{1} \frac{1}{\ln(x)}\,dx \quad \int_0^{1} \frac{\sin(x)}{x}\,dx \quad \int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^3+1}}\,dx \quad \int_0^{1} \frac{x}{\sqrt{x^3+1}}\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x)\,dx \quad \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin(x)}\,dx \quad \int_0^{1} \frac{\ln(x)}{1-x}\,dx$$

Exercice 7. Montrer que si P et Q sont deux polynômes premiers entre eux l'intégrale généralisée

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$$

converge si et seulement Q n'a pas de racines réelles et $degQ \geq degP + 2$.

Exercice 8. Les intégrales impropres suivantes sont-elles convergentes ?

1. $\int_0^1 \ln t\ dt$ **2.** $\int_0^{+\infty} t^5 e^{-t^2} dt$

3. $\int_0^{+\infty} x \sin x e^{-x} dx$ **4.** $\int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} dt$

5. $\int_0^1 \frac{dt}{(1-t)\sqrt{t}}$

Exercice 9. Les intégrales impropres suivantes sont-elles convergentes ?

1. $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t - 1}$ **2.** $\int_0^{+\infty} \frac{te^{-\sqrt{t}}}{1+t^2} dt$

3. $\int_0^1 \cos^2\left(\frac{1}{t}\right) dt$

Exercice 10. Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}_+$ continue et croissante. On note $S_n = \frac{b-a}{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)$. On suppose que $\int_a^b f(t)dt$ converge. Montrer que la suite (S_n) converge vers $\int_a^b f(t)dt$. On suppose que $\int_a^b f(t)dt$ diverge. Montrer que la suite (S_n) tend vers $+\infty$.

Exercice 11. Discuter, suivant la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergence des intégrales suivantes :

1. $\int_0^{+\infty} \frac{t \ln t}{(1+t^2)^\alpha} dt$ **2.** $\int_0^{+\infty} x^\alpha \ln\left(x + e^{\alpha x}\right) dx$

Exercice 12. Montrer que les intégrales généralisées suivantes sont convergentes et calculer leurs valeurs

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\, dx,\ \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(e^x+1)(e^{-x}+1)},\ \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}\, dx,\ \int_0^{+\infty} \ln(1 + \frac{1}{x^2})\, dx.$$

Exercice 13. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\ dt$$

converge.

1. Montrer que la fonction
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\ dt$$
est bien définie et que F est une primitive de f.
2. Montrer que
$$G(x) = \int_{x}^{+\infty} f(t)\ dt$$
est bien définie et dérivable. Que vaut $G'(x)$?