Feuille 2

Exercice 1. Déterminer les limites des quantités suivantes lorsque n tend vers l'infini :

$$\sum_{0}^{n-1} \cos(\frac{k}{n}), \qquad \sum_{n}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Exercice 2. Calculer les primitives suivantes

$$\int (7x^3 + 2x^2 - 1)\ dx \quad \int e^{-2x}\ dx \quad \int e^{3x+5}\ dx \quad \int (x^2 + \frac{1}{x^2})^2\ dx$$

Exercice 3. Calculer les primitives suivantes (par parties)

$$\int x^2 \ln(x)\ dx \quad \int x\cos(x)\ dx \quad \int x^2 \sin(x)\ dx \quad \int x^3 e^{-x^2}\ dx$$

Exercice 4. Calculer les primitives suivantes

$$\int \frac{x^5}{1+x^6}\ dx \quad \int \sin(x)\cos(x)\ dx \quad \int \frac{\ln(x)}{x}\ dx \quad \int x e^{-x^2}\ dx$$

Exercice 5. Calculer les primitives suivantes

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x}}\ dx\ (u = \sqrt{x+1}) \quad \int \frac{1}{2x^2+1}\ dx \quad \int \frac{1}{(1+x^4)}\ dx$$

Exercice 6. Calculer les primitives suivantes

$$\int \frac{x}{(1+x)x}\ dx \quad \int \frac{x}{2x^2+3x+1}\ dx \quad \int \frac{x}{2x^2+x+1}\ dx \int \frac{1}{x(x-1)(x+1)}\ dx$$

Exercice 7. Calculer les primitives suivantes

$$\int e^x \sin(e^x)\ dx\ (u = e^x) \quad \int \sin^2(x)\ dx \quad \int \cos^4(x)\ dx \quad \int x\sqrt{1-x^2}\ dx\ (x = \sin(u))$$

Exercice 8. Calculer les intégrales suivantes

$$\int_1^e x^n \ln(x)\ dx \quad \int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x+1}\ dx \quad \int_0^1 \frac{1}{(2x+1)^2}\ dx \quad \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{3+\cos(x)}\ dx \quad \int_1^2 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\ dx$$

Exercice 9. Calculer l'intégrale suivante en utilisant le changement de variable $t = 1/x$

$$\int_2^4 \frac{1}{x\sqrt{x(x-1)}}\ dx$$

Exercice 10. Pour tout entier naturel n, on pose

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\ dx.$$

1. Trouver une relation entre I_n et I_{n+2}.
2. Calculer I_0 et I_1.

3. Donner une expression de I_n (distinguer les cas n pair et n impair).

Exercice 11. Dessiner les surfaces décrites ci-dessous et calculer leurs aires :

1. la surface délimitée par les conditions $y = \sin(x)$, $y = \cos(x)$, $x = 0$, $x = \pi/4$;
2. la surface délimitée par les conditions $8y = x^3$, $y - x = 4$, $4x + y = 9$;
3. la surface délimitée par les conditions $x = 2\sqrt{y}$, $\sqrt{3}x = \sqrt{y}$, $y = 2x + 5$.

Exercice 12. Les pisciculteurs comptent le temps d'incubation des œufs de poisson en degrés-jours : par exemple pour la truite arc-en-ciel 300 degrés jours sont nécessaires, ce qui signifie que si l'eau est à 10° l'incubation durera 30 jours. Pour une certaine période la température T de l'eau a évolué selon la loi

$$T = 12\cos(\frac{\pi t}{150}),$$

t étant le temps compté en jours à partir de la ponte ($0 \leq t \leq 60$). Quelle a été la durée d'incubation ?

Exercice 13. On suppose que l'évolution du salaire d'un employé est décrit par la formule

$$s(t) = s_0 e^{\tau t},$$

où le temps t est compté en année.

1. Quel sens ont les quantités s_0 et τ ?
2. Quelle somme cumulée perçoit l'employé en N années ?
3. Comment calcule-t-on la somme cumulée si on remplace le temps continu (réel) par un temps discret (entier) ?

Exercice 14. Une variable aléatoire X a une densité

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot x^4 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Trouver c, $\mathbb{E}(X)$, $Var(X)$, et la médiane de X.

Exercice 15. Soient $a < b$ deux nombres réels. Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire de loi uniforme sur $[a, b]$.

Exercice 16. Supposons que vous ayez à votre disposition un générateur de nombres aléatoires, qui engendre des nombres réels selon la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. Vous souhaitez engendrer des nombres aléatoires, mais pas selon la loi uniforme $\mathcal{U}(0, 1)$ mais selon une certaine loi dont vous connaissez la fonction de répartition $F(t)$. Supposons que cette fonction soit continue et strictement croissante, de sorte qu'il y a une fonction inverse G – ça veut dire que

$$F(t) = u \quad \Leftrightarrow \quad t = G(u).$$

1. Choisissons Y avec notre générateur, selon la loi uniforme sur $[0, 1]$. Montrer que

$$\mathbb{P}(G(Y) \leqslant t) \;=\; F(t).$$

2. Donc en pratique, que doit-on faire pour engendrer une v.a. dont la fonction de répartition est F ?