UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Distribution et ANalyse de Fourier

Examen du 25/04/2019 (durée 2h)

Les documents ne sont pas autorisés

Exercice I. On considère l'application

$$\begin{array}{rccl} T : & \mathcal{D}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \varphi & \longmapsto & \langle T, \varphi \rangle := \lim\limits_{n \to +\infty} \left\{ n\varphi(0) - \sum_{j=1}^{n} \varphi\Big(\frac{1}{j^2}\Big) \right\}. \end{array}$$

1) Montrer que T définit une distribution d'ordre inférieur à un.

2) Déterminer le support de T.

3) En testant T contre $\varphi_p(x) := p^2 x \chi(p^2 x)$ pour $p \in \mathbb{N}^*$ et pour $\chi(\cdot) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ bien choisi, prouver que T est une distribution d'ordre un.

Exercice II. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$. On se donne $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. On considère les énoncés a) et b) suivants :

a) $\langle T, \varphi \rangle = 0$; b) $\varphi T = 0$ au sens de $\mathcal{D}'(\Omega)$.

1) Montrer que b) implique a).

2) Montrer que a) n'implique pas b).

Exercice III. On admet que :

$$\forall M \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{\sqrt{i\pi\varepsilon}} \int_0^M e^{-\frac{x^2}{4i\varepsilon}}\, dx = 1.$$

Etant donné $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, on considère la distribution T_ε de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui est associée à la fonction localement intégrable f_ε définie par :

$$\begin{array}{rccl} f_\varepsilon : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{2\sqrt{i\pi\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{4i\varepsilon}}. \end{array}$$

1) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Justifier l'existence de $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tel que $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$. Donner une condition nécessaire et suffisante (impliquant φ) sous laquelle $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

2) On fixe $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Montrer qu'il est possible de trouver $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad \langle T_\varepsilon, \varphi \rangle = \frac{\varphi(0)}{2\sqrt{i\pi\varepsilon}} \int_{-M}^{M} e^{-\frac{x^2}{4i\varepsilon}}\, dx + \frac{\sqrt{i\varepsilon}}{\sqrt{\pi}} \int_{-M}^{M} e^{-\frac{x^2}{4i\varepsilon}}\, \psi'(x)\, dx + \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}).$$

3) En déduire que la famille $(T_\varepsilon)_\varepsilon$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers la masse de Dirac en 0.

T.S.V.P. $\Longrightarrow$

Exercice IV. Soit $\varrho \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ vérifiant $\displaystyle\int \varrho(y)dy = 1$. Etant donné $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on pose :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \psi(x) := \varphi(x) - \Big(\int_{\mathbb{R}} \varphi(y)dy\Big)\, \varrho(x).$$

1) Montrer que ψ admet une primitive $\Psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

2) Soit $R \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vérifiant $R' = 0$ au sens des distributions. Montrer qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que R s'identifie à la fonction constante égale à C.

3) Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ vérifiant $\partial_{x_1} T = 0$.

3.a) Prouver que pour tout $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ il existe une unique constante $S(\psi)$ telle que :

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \qquad \langle T, \varphi \otimes \psi \rangle = S(\psi) \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)dx\,.$$

3.b) En déduire que l'application $\psi \mapsto S(\psi)$ est une distribution et que $T = 1 \otimes S$.

Exercice V. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui à x associe $e^{\frac{ix^2}{2}}$.

1) Montrer que f définit une distribution tempérée $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

2) Ecrire une équation différentielle satisfaite par la fonction f, et en déduire une équation satisfaite dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ par sa transformée de Fourier $\hat{T}_f \equiv \mathcal{F}(T) = \hat{f}$.

3) En utilisant l'exercice IV, prouver l'existence d'une constante $c \in \mathbb{C}$ telle que :

$$\forall\, \xi \in \mathbb{R}, \qquad \hat{T}_f(\xi) = c\, e^{-\frac{i\xi^2}{2}}.$$

4) On admet que :

$$\mathcal{F}\Big(e^{-\frac{\xi^2}{2}}\Big) = \sqrt{2\pi}\, e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(1+i)x^2}{2}}\, dx = 2^{\frac{1}{4}}\, \sqrt{\pi}\, e^{-i\frac{\pi}{8}}.$$

En testant $\hat{T}_f$ contre $e^{-\frac{\xi^2}{2}}$, déterminer la valeur de c.

5) Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Etablir que :

$$\forall\, \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \frac{1}{\varepsilon} \langle f(x/\varepsilon), \varphi \rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}} = \frac{c}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\varepsilon^2 \frac{\xi^2}{2}}\, \hat{\varphi}(-\xi)\, d\xi.$$

6) Quelle est la limite au sens de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ de la famille $f(x/\varepsilon)/\varepsilon$ lorsque ε tend vers 0 par valeurs positives ?

Exercice VI. Soit $P \in \mathbb{R}[X_1, \cdots, X_d]$ un polynôme à d variables. On suppose $P \not\equiv 0$. En remplaçant X_i par ∂_{x_i}, on obtient un opérateur différentiel $P(\partial)$ à coefficients constants.

1) Montrer qu'une distribution à support compact $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ vérifiant $P(\partial)T = 0$ est nécessairement nulle.

2) On suppose de plus que P ne s'annule qu'à l'origine de $\mathbb{R}^d$. Montrer que les solutions tempérées $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ de l'équation $P(\partial)T = 0$ sont toutes polynômiales.