
Examen du 18/12/2015 (durée 2 h)

Les documents ne sont pas autorisés

Questions de cours.

1) Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble non vide. Rappeler la définition de la borne supérieure de A .

Cours.

2) Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On suppose $D \neq \emptyset$. Soit $a \in D$. Expliquer ce que signifie l'affirmation " f est continue en a ".

Cours.

3) Donner l'énoncé du théorème des accroissements finis.

Cours.

Exercice I. On considère l'ensemble $A \subset \mathbb{R}$ défini via :

$$A := \{ (-1)^n + (1/n^2) ; n \in \mathbb{N}^* \}.$$

I.1) Déterminer (s'ils existent) le plus grand élément et la borne supérieure de A .

On peut écrire :

$$A := \{ u_n ; u_n = 1 + (1/4n^2), n \in \mathbb{N}^* \} \cup \{ v_n ; v_n = -1 + (1/(2n+1)^2), n \in \mathbb{N} \}.$$

La suite $(u_n)_n$ est décroissante et tend vers 1 pour n qui tend vers $+\infty$. On a :

$$1 < u_n \leq 1 + (1/4), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

La suite $(v_n)_n$ est décroissante et tend vers -1 pour n qui tend vers $+\infty$. On a :

$$-1 < v_n \leq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Par conséquent, l'ensemble A admet $5/4$ comme majorant et borne supérieure.

I.2) Déterminer (s'ils existent) le plus petit élément et la borne inférieure de A .

L'argument donné ci-dessus prouve que l'ensemble A admet -1 comme borne inférieure. Par contre, il n'admet pas de minorant.

Exercice II. Soit P la fonction polynômiale réelle définie par $P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$. On suppose que :

$$a_0 + \frac{a_1}{2} + \dots + \frac{a_n}{n+1} = 0.$$

En considérant une primitive de $P(\cdot)$ bien choisie, montrer que $P(\cdot)$ admet au moins une racine dans l'intervalle $]0, 1[$.

On considère la primitive $Q(\cdot)$ de $P(\cdot)$ qui s'annule en 0, à savoir :

$$Q(x) = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

On a $Q(0) = 0$ et $Q(1) = 0$. Le théorème de Rolle permet de conclure.

Exercice III. Soit x un réel strictement positif.

III.1) Rappeler la définition de la fonction *cosinus hyperbolique* (notée ch). Calculer sa dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}$. Tracer son graphe sur $\mathbb{R}$.

On rappelle que :

$$ch\,x = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}), \quad ch^{(2n)}x = ch\,x, \quad ch^{(2n+1)}x = sh\,x = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}).$$

III.2) Ecrire la formule de Taylor-Lagrange pour la fonction cosinus hyperbolique, sur l'intervalle $[0, x]$, poussée jusqu'à l'ordre 5.

Comme ch est paire, seuls subsistent les termes pairs. Il reste :

$$ch\,x = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{24} x^4 + \frac{1}{6!} x^6 ch\,c, \quad c \in]0, x[.$$

III.3) Donner une approximation rationnelle du nombre $ch(1/2)$ valable avec une erreur inférieure à 10^{-4} . Justifier la réponse.

Puisque la fonction ch est croissante, avec $ch(1/2) \leq e \leq 3$, pour $x = 1/2$, la formule ci-dessus conduit à :

$$0 \leq 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{24} \left(\frac{1}{2}\right)^4 - ch\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{6!} \left(\frac{1}{2}\right)^6 ch\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{720} \frac{1}{64} 3 = \frac{1}{15360}.$$

Exercice IV. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant $f(0) > 0$ et $f(x)^2 = 1$ pour tout $x \in I$. Montrer que $f \equiv 1$.

On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe $x \in I \setminus \{0\}$ tel que $f(x) = -1$. Alors le théorème des valeurs intermédiaires fournit l'existence de $c \in]0, x[$ tel que $f(c) = 0$. Contradiction.

Exercice V. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x E(x - \frac{1}{x})$.

V.1) La fonction f est-elle continue sur son domaine de définition ?

La réponse est NON. Se placer par exemple en $1 + \sqrt{2}$. Les limites à gauche et à droite valent respectivement 1 et 2.

V.2) La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

La réponse est OUI. En effet, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [1/(n+1), 1/n[$, la fonction $x \mapsto x - \frac{1}{x}$ étant strictement croissante, on a :

$$\frac{1}{n+1} - n - 1 \leq x - \frac{1}{x} < \frac{1}{n} - n \implies -n - 2 \leq E\left(x - \frac{1}{x}\right) < 1 - n.$$

Il vient ensuite :

$$\frac{-n-2}{n} \leq x E\left(x - \frac{1}{x}\right) < \frac{1-n}{1+n}.$$

Les termes de gauche et de droite tendent vers -1 lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui correspond à x qui tend vers 0 . En posant $f(0) = -1$, on récupère un prolongement par continuité.

Exercice VI. Calculer le développement limité en 0 à l'ordre 4 des fonctions f suivantes.

VI.1) $f(x) = \ln(\cos x)$.

Le DL en 0 à l'ordre 4 de $\cos x$ est :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(|x^5|).$$

Le DL en $\cos 0 = 1$ à l'ordre 4 de $\ln$ est :

$$\ln(1-y) = -y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + O(|y^5|).$$

On fait $y = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}$ et on reporte comme indiqué dans les règles de composition des DLs. Cela permet d'obtenir :

$$f(x) = \ln(\cos x) = -\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right) - \frac{1}{2} \frac{x^4}{4} + O(|x^5|) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + O(|x^5|).$$

VI.2) $f(x) = \tan x$.

Plusieurs méthodes possibles (dont une vue en TD) qui doivent aboutir à :

$$f(x) = \tan x = x + \frac{x^3}{3} + O(|x^5|).$$

Problème. L'objectif de ce problème est d'étudier l'arc paramétré γ qui est défini en coordonnées polaires par :

$$\gamma(\theta) = r(\theta) \vec{u}_\theta, \quad \vec{u}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_\theta = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ +\cos \theta \end{pmatrix}, \quad r(\theta) = \frac{1}{\cos \theta} + (\cos \theta)^2.$$

P.1) Préciser le domaine de définition de la fonction $r(\cdot)$ et montrer qu'on peut ramener l'étude au domaine $D := [0, \pi/2[\cup]\pi/2, \pi]$.

La fonction $r(\cdot)$ est définie sur $\mathbb{R}$ privé des points $\frac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. Elle est 2π périodique et paire. On peut donc réduire le domaine d'étude à D . La courbe se récupère ensuite par une symétrie par rapport à l'axe (Ox) .

P.2) Montrer que l'arc paramétré γ admet une droite asymptote lorsque l'angle θ tend vers $\pi/2$ avec $\theta < \pi/2$. Préciser la position de γ par rapport à cette droite.

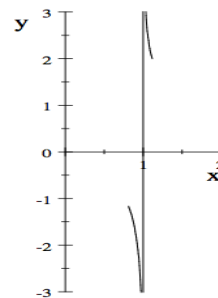
On a $\gamma(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$ avec :

$$x(\theta) = r(\theta) \cos \theta = 1 + \cos^3 \theta, \quad y(\theta) = r(\theta) \sin \theta = \tan \theta + \sin \theta \cos^2 \theta,$$

d'où l'on déduit :

$$\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} x(\theta) = 1, \quad \lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2} \pm} y(\theta) = \mp \infty.$$

La droite verticale d'équation $x = 1$ est donc une asymptote. De plus, la courbe se situe à droite de cette asymptote en $\frac{\pi}{2}-$ et à gauche en $\frac{\pi}{2}+$, comme indiqué sur le dessin.



P.3) Montrer que l'arc paramétré γ admet une droite asymptote lorsque l'angle θ tend vers $\pi/2$ avec $\pi/2 < \theta$. Préciser la position de γ par rapport à cette droite.

C'est déjà fait ci-dessus.

P.4) Dresser le tableau de variations de $r(\cdot)$.

La fonction $r(\cdot)$ est dérivable sur D avec :

$$r'(\theta) = \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} (1 - 2 \cos^3 \theta), \quad r''(\theta) = \frac{1}{\cos \theta} (1 - 2 \cos^3 \theta) + 2 \sin^2 \theta \left(\frac{1}{\cos^3 \theta} + 1 \right).$$

On a $r'(\theta) = 0$ sur D si et seulement si $\theta = 0$, $\theta = \theta_0 := \arccos 2^{-1/3}$ ou $\theta = \pi$. Le tableau de variations de $\rho \equiv r$ est donc le suivant :

θ	0	θ_0	$\frac{\pi}{2}$	π
ρ'	0	-	0	+
ρ	2	$\frac{3}{2} 2^{\frac{1}{3}}$	$+\infty$	0

P.5) Rappeler comment se calcule (à l'aide de $\vec{u}_\theta$, $\vec{v}_\theta$, r , r' et r'') les dérivées première et seconde en θ de γ . Repérer les éventuels points singuliers.

C'est du cours. Cela étant dit, on peut facilement retrouver les résultats en utilisant les relations $\vec{u}'_\theta = \vec{v}_\theta$ et $\vec{v}'_\theta = -\vec{u}_\theta$ qui donnent :

$$\gamma'(\theta) = r'(\theta) \vec{u}_\theta + r(\theta) \vec{v}_\theta, \quad \gamma''(\theta) = [r''(\theta) - r(\theta)] \vec{u}_\theta + 2 r'(\theta) \vec{v}_\theta.$$

Les points singuliers sont ceux pour lesquels $\gamma'(\theta) = 0$. Vu la formule donnée ci-dessus, cela équivaut à $r(\theta) = 0$ (on est à l'origine) et $r'(\theta) = 0$. Seul $\theta = \pi$ convient.

P.6) Montrer que l'arc paramétré γ contient l'origine O , et qu'il admet en O pour tangente l'axe (Ox). Identifier la position de γ par rapport à sa tangente en O .

L'origine est atteinte pour l'angle $\theta = \pi$ et correspond à un point singulier. Pour θ qui tend vers π par valeurs inférieures, on observe que :

- le rapport $y(\theta)/x(\theta) = \tan \theta$ tend vers 0 par valeurs négatives ;
- l'abscisse $x(\theta)$ reste positive.

Cela signifie que l'arc paramétré admet l'axe (Ox) pour tangente en O , et qu'il est situé dans le quadrant inférieur droit $\{(x, y); x > 0, y < 0\}$. Par ailleurs, on peut remarquer que $r''(\pi) = -3$ de sorte que :

$$\begin{aligned}\gamma(\theta) &= \frac{1}{2} \gamma''(\pi) (\theta - \pi)^2 + o(\theta - \pi)^2 \\ &= -3 (\theta - \pi)^2 \vec{u}_\pi + o(\theta - \pi)^2 = 3 (\theta - \pi)^2 \vec{v} + o(\theta - \pi)^2.\end{aligned}$$

C'est une autre manière de voir apparaître la tangente. Puisque l'arc est symétrique par rapport à l'axe (Ox) , l'origine est un point de rebroussement de première espèce.

P.7) Montrer qu'il existe un unique point M en lequel l'arc paramétré γ possède une tangente qui est parallèle à l'axe (Oy) . Identifier M et décrire la position de γ par rapport à sa tangente en M .

On a $x'(\theta) = -3 \cos^2 \theta \sin \theta$ qui vaut 0 dans D pour $\theta = 0$ et $\theta = \pi$. Le cas de $\theta = \pi$ a déjà été étudié et ne convient pas (du fait de l'annulation simultanée de $y'(\theta)$). Reste à voir ce qui se passe pour $\theta = 0$. Mais alors $\gamma(0) = 2$ et $\gamma'(0) = 2\vec{j}$. Ainsi, une tangente verticale passe par le point $(2, 0)$.

P.8) Montrer qu'il existe un angle $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ en lequel les vecteurs $\gamma'(\theta)$ et $\gamma''(\theta)$ sont colinéaires (possibilité de point d'inflexion). Indication : penser à appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.

Comme expliqué en cours et Td, les points d'inflexion se trouvent parmi les points en lesquels les dérivées $\gamma'(\theta)$ et $\gamma''(\theta)$ sont colinéaires. Soit à tester la condition :

$$h(\theta) := 2 r'(\theta)^2 + r(\theta)^2 - r(\theta) r''(\theta) = 0.$$

Le calcul fournit :

$$h(0) = 6 > 0, \quad h(\theta_0) = r(\theta_0) [r(\theta_0) - r''(\theta_0)].$$

On obtient :

$$r(\theta_0) - r''(\theta_0) = \frac{1 + \cos^3 \theta_0}{\cos^3 \theta_0} [\cos^2 \theta_0 - 2 \sin^2 \theta_0 (1 + \cos^3 \theta_0)],$$

puis :

$$\cos^2 \theta_0 - 2 \sin^2 \theta_0 (1 + \cos^3 \theta_0) = \cos^2 \theta_0 - 3 \sin^2 \theta_0 = 4 \cos^2 \theta_0 - 3 = 2^{4/3} - 3 < 0.$$

Le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction $h(\cdot)$ sur l'intervalle $[0, \theta_0]$ garantit l'existence de $\bar{\theta} \in]0, \theta_0[$ tel que $h(\bar{\theta}) = 0$. Un calcul plus poussé, nécessitant d'aller chercher la dérivée troisième de $r(\cdot)$, indique que $\bar{\theta}$ est effectivement un point d'inflexion.

P.9) Tracer l'arc paramétré γ .

Pour θ entre 0 et θ_0 , on se rapproche de l'origine en tournant dans le sens direct. Puis, pour θ entre θ_0 et $\frac{\pi}{2}$, on s'éloigne de l'origine en tournant dans le sens direct. Pour θ entre $\frac{\pi}{2}$ et π , on se rapproche de l'origine en tournant dans le sens direct.

La figure est tracée en page suivante.

