Université Paul Sabatier

Systèmes Différentiels

résumé de cours

Jean-Pierre RAYMOND

Ce texte est un résumé de la première partie du cours du module B4, Analyse et Approximation des Problèmes Différentiels de la Maîtrise de Mathématiques.

Chapitre 1

Théorèmes d'existence et d'unicité

1.1 Notations, définitions et notions préliminaires

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, f une application continue de $I \times U$ dans $\mathbb{R}^n$. On s'intéresse à des systèmes différentiels du type suivant

$$(E) \qquad x'(t) = f(t, x(t)).$$

Définition 1.1.1 *Une fonction x définie sur un intervalle $I_x \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, est appelée solution de (E) lorsque les propriétés suivantes sont vérifiées*

(i) $\quad I_x \subset I$, $intI_x \neq \emptyset$,

(ii) $\quad x \in C^1(I_x; U)$,

(ii) $\quad x'(t) = f(t, x(t))$ *pour tout* $t \in I_x$.

Notations. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, $|x|$ désigne la norme euclidienne de x. Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ est une application différentiable en $x \in U$, on notera indifféremment sa différentielle par $f'(x)$ ou $Df(x)$.

Définition 1.1.2 *(Fonction Lipschitzienne) Une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ est une application Lipschitzienne de rapport k sur U si*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2| \quad \textit{pour tout } x_1 \in U, \textit{ et tout } x_2 \in U.$$

Définition 1.1.3 *Une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ est localement Lipschitzienne sur U si, pour tout $x_0 \in U$, il existe un voisinage $V_{x_0} \subset U$ de x_0 tel que $f|_{V_{x_0}}$ soit Lipschitzienne sur V_{x_0}.*

Exemple. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est localement Lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+^*$, mais pas Lipschitzienne.

Proposition 1.1.1 *Si $f \in C^1(U; \mathbb{R}^n)$ alors f est localement Lipschitzienne sur U. Si de plus U est convexe (ou même étoilé), et si $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in C_b(U; \mathbb{R}^n)$ pour tout $i = 1, \ldots, n$, alors f est Lipschitzienne sur U.*

Définition 1.1.4 *Une fonction $I \times U \mapsto \mathbb{R}^n$ est dite continue et Lipschitzienne sur U uniformément par rapport à $t \in I$ si* *(i)* f *continue sur* $I \times U$,

(ii) *Il existe* $k > 0$ *tel que*

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq k|x_1 - x_2| \quad \textit{pour tout } t \in I, \textit{ tout } x_1 \in U, \textit{ et tout } x_2 \in U.$$

Définition 1.1.5 *Une fonction* $I \times U \mapsto \mathbb{R}^n$ *est dite continue et localement Lipschitzienne par rapport à* $x \in U$, *uniformément en* t, *si*

(i) f *continue sur* $I \times U$,

(ii) *Pour tout* (t_0, x_0), *il existe un voisinage* $V_{t_0} \times V_{x_0} \subset I \times U$ *de* (t_0, x_0), *tel que* $f|_{V_{t_0} \times V_{x_0}}$ *soit Lipschitzienne sur* V_{x_0}, *uniformément par rapport à* $t \in V_{t_0}$.

Proposition 1.1.2 *Si* $f \in C(I \times U; \mathbb{R}^n)$, *si pour tout* $t \in I$ $f(t, \cdot)$ *est différentiable, et si* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *est continue sur* $I \times U$, *alors* f *est localement Lipschitzienne par rapport à* $x \in U$, *uniformément en* t.

1.2 Théorèmes de Cauchy-Lipschitz

Théorème 1.2.1 *(Théorème d'existence locale et d'unicité) Soit* $f : I \times U \mapsto \mathbb{R}^n$ *continue sur* $I \times U$, *localement Lipschitzienne en* $x \in U$, *uniformément en* t. *Pour tout* $(t_0, x_0) \in I \times U$, *le problème de Cauchy*

$$(C) \qquad x'(t) = f(t, x(t)), \qquad x(t_0) = x_0,$$

admet une solution (x, I_x) $(t_0 \in I_x)$. *De plus la solution* x *est unique sur* I_x.

Remarque. (x, I_x) est solution de (C) si et seulement si $x \in C(I_x; \mathbb{R}^n)$ et

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds \quad \text{pour tout } t \in I_x.$$

Définition 1.2.1 *Un cylindre* $S = [t_0 - T, t_0 + T] \times \bar{B}(x_0, R)$ *est dit cylindre de sécurité pour* (C) *quand toute solution de* (C) *sur* $[t_0 - T, t_0 + T]$ *reste contenue dans* $\bar{B}(x_0, R)$.

Preuve du théorème. On construit d'abord un cylindre de sécurité pour (C). Soit $D = [t_0 - \tau, t_0 + \tau] \times \bar{B}(x_0, R) \subset I \times U$, où $\tau > 0$ et $R > 0$ sont tels que, pour tout $t \in [t_0 - \tau, t_0 + \tau]$, $f(t, \cdot)$ est Lipschitzienne de rapport $k > 0$ sur $\bar{B}(x_0, R)$. Posons $M = \max_{(t,x) \in D} |f(t, x)|$, et soit $T = \min(\tau, R/M)$.

Soit $\phi : x \mapsto \phi(x)$, l'application définie sur $C([t_0 - T, t_0 + T]; \bar{B}(x_0, R))$ par

$$\phi(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds.$$

On vérifie aisément que ϕ est une contraction sur $C([t_0 - T, t_0 + T]; \bar{B}(x_0, R))$ muni de la distance associée à la norme $\|x\|_* = \max_{t \in [t_0 - T, t_0 + T]} (exp(-2k|t - t_0|)|x(t)|$. En effet, si $x \in C([t_0 - T, t_0 + T]; \bar{B}(x_0, R))$, alors $\phi(x) \in C([t_0 - T, t_0 + T]; \bar{B}(x_0, R))$ (vérification facile). De plus

$$|(\phi(y) - \phi(z))(t)| \leq \Big| \int_{t_0}^{t} |f(s, y(s)) - f(s, z(s))| ds \Big|$$

$$\leq \left| \int_{t_0}^{t} e^{2k|s-t_0|} k|y(s) - z(s)| e^{-2k|s-t_0|} ds \right| \leq e^{2k|t-t_0|} \|y - z\|_*/2,$$

d'où l'on déduit $\|\phi(y) - \phi(z)\|_* \leq \|y - z\|_*/2$.

Définition 1.2.2 *(Prolongement) Soient (x_1, I_{x_1}) et (x_2, I_{x_2}) deux solutions de (E). On dit que (x_1, I_{x_1}) est un prolongement de (x_2, I_{x_2}) lorsque $I_{x_2} \supset I_{x_1}$ et $x_2|_{I_{x_1}} = x_1$. Si de plus $I_{x_2} \neq I_{x_1}$ on dit que (x_1, I_{x_1}) est un prolongement strict de (x_2, I_{x_2}).*

Définition 1.2.3 *(Solution maximale) On dit qu'une solution (x, I_x) de (E) est une solution maximale si elle n'admet pas de prolongement strict.*

Théorème 1.2.2 *(Existence locale d'une solution maximale) Toute solution (x, I_x) se prolonge en une solution maximale (pas nécessairement unique).*

Preuve. Soit $I_x = |a, b| \subset I$. Nous allons montrer l'existence d'une solution maximale à droite (l'existence d'une solution maximale à gauche se démontre de manière identique). On construit des prolongements successifs $(x_k, |a, b_k[)$ (i.e. $(x_{k+1}, |a, b_{k+1}[)$ est un prolongement de $(x_k, |a, b_k[)$. On pose $(x_1, |a, b_1[) \equiv (x, |a, b[)$. On suppose que $b_1 < \infty$, sinon la preuve est terminée. Pour tout $k \geq 1$, on pose

$$c_k = \sup\{c \mid (x_{k-1}, |a, b_{k-1}[) \text{ admet un prolongement sur } |a, c[\}.$$

On a $c_k \geq b_{k-1}$. Supposons que c_k est fini à partir d'un certain rang. Le cas où c_k est infini pour tout k est étudié à la fin de la preuve. Par définition du 'sup', il existe $b_k \in [b_{k-1}, c_k]$ et $x_k : |a, b_k[\mapsto \mathbb{R}^n$ tels que $(x_k, |a, b_k[)$ est un prolongement de $(x_{k-1}, |a, b_{k-1}[)$. De plus, on peut choisir b_k tel que $c_k - b_k < \min((c_k - b_{k-1})/k, 1/k)$. La suite $(c_k)_k$ est décroissante car l'ensemble des prolongements de x_{k-1} contient les prolongements de x_k. Nous avons

$$b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_k \leq \ldots \leq c_k \leq c_{k-1} \leq \ldots \leq c_2,$$

et les suites $(b_k)_k$ et $(c_k)_k$ sont adjacentes. Soit $\tilde{b} = \lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty} c_k$. Soit $(\tilde{x}, |a, \tilde{b}|)$ le prolongement commun des solutions x_k (si la solution est prolongeable à $\tilde{b}$, on prendra $|a, \tilde{b}]$ comme intervalle de définition maximal, sinon on prendra $|a, \tilde{b}[$). Pour montrer que ce prolongement est maximal, raisonnons par l'absurde. Soit $(z, |a, c|)$ un prolongement strict de $(\tilde{x}, |a, \tilde{b}|)$. Alors $(z, |a, c|)$ prolonge $(x_{k-1}, |a, b_{k-1}[)$ pour tout $k > 1$, et donc $c \leq c_k$, par définition de c_k. Par passage à la limite on obtient $c \leq \tilde{b}$, ce qui est en contradiction avec "$(z, |a, c|)$ est un prolongement strict de $(\tilde{x}, |a, \tilde{b}|)$".

Le théorème est donc démontré dans le cas où c_k est fini à partir d'un certain rang.

Dans le cas où $c_k = \infty$ pour tout k, on peut choisir $b_k \geq k$ dans la construction précédente, et on a $\lim_{k\to\infty} b_k = \infty$.

Théorème 1.2.3 *(Théorème d'existence de solution maximale et d'unicité) Les hypothèses sont celles du théorème d'existence locale. Pour tout $(t_0, x_0) \in I \times U$, il existe une solution maximale unique $(x, I(t_0, x_0))$ de (E) vérifiant $x(t_0) = x_0$.*

L'intervalle maximal $I(t_0, x_0) = (t^-(t_0, x_0), t^+(t_0, x_0))$ est ouvert dans I. De plus t^- vérifie

$$t^- = \inf I \quad ou \qquad \lim_{t \searrow t^-} \min(d(x(t), \partial U), 1/|x(t)|) = 0.$$

De même t^+ vérifie

$$t^+ = \sup I \quad ou \qquad \lim_{t \nearrow t^+} \min(d(x(t), \partial U), 1/|x(t)|) = 0.$$

Preuve. On suppose que I est ouvert. Le lecteur pourra adapter la preuve aux autres cas. On pose

$$t^+(t_0,x_0) = \sup\{t \in I \mid (C) \text{ a une solution sur } [t_0,t]\},$$
$$t^-(t_0,x_0) = \inf\{t \in I \mid (C) \text{ a une solution sur } [t,t_0]\}.$$

Donc (C) admet une solution sur $]t^-,t^+[$. De plus, (C) n'a pas de solution sur $]t^-,t^+]$ (ni sur $[t^-,t^+[$), sinon on pourrait prolonger la solution sur $]t^-,t^+ + \varepsilon[$, avec $\varepsilon > 0$, et on aurait une contradiction avec la définition de t^+. De la partie 'unicité' du Théorème d'existence locale et d'unicité, il découle que la solution définie sur $]t^-,t^+[$ est unique. Vérifions la propriété énoncée pour t^+.

Supposons que $t^+ < \sup I$. On veut montrer que

$$\lim_{t\nearrow t^+} \min(d(x(t),\partial U), 1/|x(t)|) = 0.$$

Raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une suite $(t_i)_i$, $t_i \nearrow t^+$, telle que

$$|x(t_i)| \leq 1/(2\varepsilon) \qquad \text{et} \quad d(x(t_i),\partial U) \geq 2\varepsilon, \qquad \text{pour tout } i.$$

Sans perte de généralité, on supposera que $\varepsilon < 1/(2\varepsilon)$. Posons

$$M = \max\{|f(t,x)| \mid t_0 \leq t \leq t^+, \;\; |x| \leq 1/\varepsilon, d(x,\partial U) \geq \varepsilon\}.$$

Soit $0 < \delta < \varepsilon/M$. Montrons que, pour tout i, et tout s vérifiant $0 \leq s \leq \delta$ et $s \leq t^+ - t_i$, on a

$$|x(t_i+s)| < 1/\varepsilon \qquad \text{et} \qquad d(x(t_i+s),\partial U) > \varepsilon. \tag{1.1}$$

Pour montrer (1.1) on raisonne par l'absurde. On suppose qu'il existe i et $\beta \in (0, \min(\delta, t^+ - t_i)]$ tels que

$$|x(t_i+s)| \leq 1/\varepsilon \qquad \text{et} \qquad d(x(t_i+s),\partial U) \geq \varepsilon \qquad \text{pour tout } 0 \leq s \leq \beta,$$

et

$$|x(t_i+\beta)| = 1/\varepsilon \qquad \text{ou} \qquad d(x(t_i+\beta),\partial U) = \varepsilon.$$

Étant donné que l'on a $|f(t_i+s, x(t_i+s))| \leq M$ pour tout $0 \leq s \leq \beta$, on obtient

$$|x(t_i+\beta) - x(t_i)| \leq \int_{t_i}^{t_i+\beta} |f(s,x(s))|ds \leq \beta M \leq \delta M < \varepsilon.$$

Par conséquent $|x(t_i+\beta)| < |x(t_i)| + \varepsilon \leq 1/(2\varepsilon) + \varepsilon \leq 1/\varepsilon$, car $\varepsilon \leq 1/(2\varepsilon)$. Mais, on a aussi

$$d(x(t_i+\beta),\partial U) \geq d(x(t_i),\partial U) - |x(t_i+\beta) - x(t_i)| > 2\varepsilon - \varepsilon = \varepsilon.$$

On a une contradiction et (1.1) est prouvé.

De (1.1), on déduit que, pour tout i tel que $t^+ - t_i \leq \delta$, on a :

$$|x(t) - x(s)| \leq \int_s^t |f(\tau, x(\tau))|d\tau \leq M|t-s| \tag{1.2}$$

pour tout $s,t \;\in [t_i,t^+)$, $s \leq t$.

Montrons que $\lim_{t\nearrow t^+} x(t)$ existe. Soit $(t'_k)_k$ une suite telle que $t'_k < t^+$ et $\lim_{k\to\infty} t'_k = t^+$. L'inégalité (1.2) montre que $(x(t'_k))_k$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}^n$. Soit y la limite de cette suite. Cette limite ne dépend pas de la suite $(t'_k)_k$. En effet si $(s_k)_k$ est une autre suite telle que $s_k < t^+$ et $\lim_{k\to\infty} s_k = t^+$, et si z est la limite de $(x(s_k))_k$, on a $|z-y| \leq M \times \lim_{k\to\infty} |s_k - t'_k| = 0$. Donc $\lim_{t\nearrow t^+} x(t)$ existe et appartient à U.

De manière analogue, on démontrerait que $\lim_{t\nearrow t^+} \int_{t_0}^t f(\tau, x(\tau))d\tau$ existe. Ceci permet de construire une solution de (C) sur $(t^-, t^+]$. Ce qui contredit le choix de t^+. Le théorème est donc démontré.

1.3 Théorème de Cauchy-Peano-Arzéla

Soit f une fonction continue sur $I \times U$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. On veut montrer l'existence locale de solution pour (C) sous cette seule hypothèse de continuité.

Soit $C_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \bar{B}(x_0, R_0)$ un cylindre de longueur $2T_0$ et de rayon R_0, contenu dans $I \times U$. Notons $M = \max_{(t,x)\in C_0} |f(t,x)| < \infty$. Le théorème d'existence locale est basé sur la construction de solutions approchées pour (C) dans le cylindre $[t_0 - T, t_0 + T] \times \bar{B}(x_0, R_0)$, où $T = \min(T_0, R_0/M)$. Pour construire de telles solutions on utilise la méthode d'Euler. On construit cette solution sur $[t_0, t_0+T]$, la construction sur $[t_0 - T, t_0]$ est analogue. On se donne une subdivision (régulière pour simplifier) de $[t_0, t_0 + T]$:

$$t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N = t_0 + T.$$

Le pas de la subdivision est $h = T/N$. Pour chaque subdivision de pas $h = T/N$, on définit une fonction y_N continue sur $[t_0, t_0 + T]$, et affine sur les intervalles de la subdivision, de la façon suivante :

$$y_N(t_0) = x_0,$$
$$y_N(t) = y_N(t_n) + (t - t_n) f(t_n, y_N(t_n)) \text{ si } t \in [t_n, t_{n+1}].$$

Proposition 1.3.1 *Pour toute subdivision de pas $h = T/N$, la fonction y_N définie ci-dessus est contenue dans la boule $\bar{B}(x_0, R_0)$.*

Preuve. Soit $h = T/N$ donné. On vérifie par récurrence sur $n \leq N$ que

$$|y_N(t) - x_0| \leq M|t - t_0| \quad \text{pour tout } t \in [t_0, t_n]. \tag{1.3}$$

La propriété (1.3) est vraie pour $n = 0$. Supposons la vraie pour n. Soit $t \in [t_n, t_{n+1}]$, on a :

$$|y_N(t) - x_0| \leq |y_N(t) - y_N(t_n)| + |y_N(t_n) - x_0| \leq |f(t_n, y_N(t_n))|(t - t_n) + M(t_n - t_0) \leq M|t - t_0|$$

(on a $|f(t_n, y_N(t_n))| \leq M$ car $y_N(t_n) \in \bar{B}(x_0, R_0)$). La proposition est donc démontrée. □

Théorème 1.3.1 *(Théorème de Cauchy-Peano-Arzéla) Le problème (C) admet une solution définie sur $[t_0 - T, t_0 + T]$ à valeurs dans $\bar{B}(x_0, R_0)$.*

Preuve. Soit y_N la fonction définie par la méthode d'Euler. La suite $(y_N)_N$ est uniformément bornée, car toutes les solutions vivent dans $\bar{B}(x_0, R_0)$. Les fonctions y_N sont Lipschitzienne de rapport M (par construction et parce que $|f(t_n, y_N(t_n))| \leq M$ si $t_n \in$

$[t_0 - T, t_0 + T]$ et $y_N(t_n) \in \bar{B}(x_0, R_0)$). La famille $(y_N)_N$ est donc équicontinue. D'après le Théorème d'Ascoli-Arzéla, il existe une sous-suite, que l'on indexe toujours par N pour simplifier les notations, et une fonction $y \in C([t_0-T, t_0+T]; \bar{B}(x_0, R_0))$, telle que $(y_N)_N$ converge vers y uniformément sur $[t_0 - T, t_0 + T]$. Pour montrer que y est solution de (C), introduisons le module de continuité de f sur $[t_0 - T, t_0 + T] \times \bar{B}(x_0, R_0)$:

$$\omega_f(\delta) = \max\{|f(\tau_1, y_1) - f(\tau_2, y_2)| \mid |\tau_1 - \tau_2| + |y_1 - y_2| \leq \delta\}.$$

Pour tout $\tau \in (t_n, t_{n+1})$, les fonctions y_N vérifient

$$|y_N'(\tau) - f(\tau, y_N(\tau))| = |f(t_n, y_N(t_n)) - f(\tau, y_N(\tau))| \leq \omega_f((M+1)h).$$

Par conséquent, nous avons :

$$|y_N(t) - x_0 - \int_{t_0}^{t} f(\tau, y_N(\tau))d\tau| \leq |t - t_0|\omega_f((M+1)h).$$

En passant à la limite dans cette estimation, on montre que y est solution de (C).

Théorème 1.3.2 *(Théorème d'Ascoli-Arzéla) Soit K un espace métrique compact, et soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble de $C(K; \mathbb{R}^n)$. Alors $\mathcal{F}$ est relativement compact dans $C(K; \mathbb{R}^n)$ si, et seulement si, $\mathcal{F}$ est borné et équicontinu.*

1.4 Lemmes techniques

Pour démontrer qu'une trajectoire quitte une région donnée en temps fini nous utiliserons parfois le lemme suivant.

Lemme 1.4.1 *Si x est une fonction de $[a, \infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, de classe C^1. Si la limite de x quand t tend vers l'infini existe dans $\mathbb{R}$, et si la limite de x' quand t tend vers l'infini existe dans $\bar{\mathbb{R}}$, alors*

$$lim_{t\to\infty} x'(t) = 0.$$

Lemme 1.4.2 *Si x est une fonction réelle positive ou nulle, Lipschitzienne de rang k sur $[a, \infty[$ et si l'intégrale $\int_a^\infty x(t)dt$ converge, alors*

$$lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$$

1.5 Exercices

Exercice 1. Soit f une fonction continue de $[t_0, t_1[\times\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que

$$\langle f(t,X), X\rangle \leq a(t)(|X|^2+1) \tag{1.4}$$

pour tout $t \in [t_0, t_1[$, et tout $X \in \mathbb{R}^n$, où a est une fonction positive, intégrable sur $]t_0, t_1[$. Soit X une solution maximale du problème de Cauchy $X(t_0) = X_0, \quad X'(t) = f(t, X(t))$. Montrer que $1 + |X(t)|^2 \leq (1 + |X_0|^2)\exp(2\int_{t_0}^t a(s)ds)$ pour tout $t \in [t_0, t_m[$ ($[t_0, t_m[$ est l'intervalle sur lequel est définie la solution maximale). En déduire que X est une solution globale.

Exercice 2. Soit f une fonction continue de $[t_0, t_1[\times\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que

$$\langle f(t,X) - f(t,Y), X - Y\rangle \leq a(t)|X-Y|^2 \tag{1.5}$$

pour tout $t \in [t_0, t_1[$, tout $X \in \mathbb{R}^n$, et tout $X \in \mathbb{R}^n$, où a est une fonction positive, intégrable sur $]t_0, t_1[$. Montrer que l'équation $X(t_0) = X_0, \quad X'(t) = f(t, X(t))$ admet une solution unique globale sur $[t_0, t_1[$.

Exercice 3. (*Équation différentielle de Van der Pol*) L'équation suivante permet de décrire les phénomènes d'oscillations dans certains circuits électriques

$$(E) \qquad \begin{array}{rcl} x'(t) & = & y(t) - x^3(t) + x(t), \\ y'(t) & = & -x(t). \end{array}$$

1 - Montrer que, pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, et tout $t_0 \in \mathbb{R}$, le problème $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$, (x, y) vérifie (E) sur $\mathbb{R}$, admet une solution globale unique. L'ensemble $(x(t), y(t))_{t\in\mathbb{R}}$ sera appelé trajectoire de la solution (x, y).
2 - Soient $(x(t), y(t))_{t\in\mathbb{R}}$ et $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))_{t\in\mathbb{R}}$ deux trajectoires de (E). Montrer que si ces deux trajectoires ont un point commun, alors elles sont confondues (i.e. les ensembles $(x(t), y(t))_{t\in\mathbb{R}}$ et $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))_{t\in\mathbb{R}}$ sont égaux. Cela ne signifie pas que $(x(t), y(t)) = (\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ pour tout t). Montrer que si une trajectoire a un point double, i.e. si $(x(t_1), y(t_1)) = (x(t_2), y(t_2))$, alors les solutions associées sont périodiques. Quelles sont les trajectoires réduites à un point ?
3 - Soit $(x(t), y(t))_{t\in\mathbb{R}}$ une trajectoire de (E), montrer que $(-x(t), -y(t))_{t\in\mathbb{R}}$ est aussi une trajectoire de (E).
4 - Considérons les ensembles suivants du plan

$$\begin{array}{rcll} \Delta^+ & = & \{(0,y) \mid y > 0\}, & \\ A & = & \{(x,y) \mid x > 0 \text{ et } y > x^3 - x\}, & \Gamma_+ = \{(x,y) \mid x > 0 \text{ et } y = x^3 - x\}, \\ B & = & \{(x,y) \mid x > 0 \text{ et } y < x^3 - x\}, & \Delta^- = \{(0,y) \mid y < 0\}, \\ C & = & \{(x,y) \mid x < 0 \text{ et } y < x^3 - x\}, & \Gamma_- = \{(x,y) \mid x < 0 \text{ et } y = x^3 - x\}, \\ D & = & \{(x,y) \mid x < 0 \text{ et } y > x^3 - x\}. & \end{array}$$

Soit $(x(t), y(t))_{t\in\mathbb{R}}$ une trajectoire de (E). Montrer que si $(x(t_0), y(t_0)) \in \Delta^+$, alors il existe $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ tels que $t_0 < t_1$, $(x(t), y(t)) \in A$ si $t \in]t_0, t_1[$, $(x(t_1), y(t_1)) \in \Gamma_+$, $(x(t), y(t)) \in B$ si $t \in]t_1, t_2[$, $(x(t_2), y(t_2)) \in \Delta^-$, $(x(t), y(t)) \in C$ si $t \in]t_2, t_3[$, $(x(t_3), y(t_3)) \in \Gamma_-$, $(x(t), y(t)) \in D$ si $t \in]t_3, t_4[$, $(x(t_4), y(t_4)) \in \Delta^+$.
5 - Soit $y_0 > 0$. Soit $(x(t), y(t))_{t\in\mathbb{R}}$ la trajectoire de (E) telle que $(x(t_0), y(t_0)) = (0, y_0)$. Les points $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ sont ceux de la question 4, associés à cette trajectoire. Posons

$\sigma(y_0) = y(t_2)$. Montrer que $\sigma(y_0)$ ne dépend que de y_0 (et ne dépend pas de t_0). Montrer que σ est une application monotone continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^-$. Montrer que $(0, y_0)$ appartient à la trajectoire d'une solution périodique si, et seulement si, $\sigma(y_0) = -y_0$.

6 - Soit β le réel positif tel que la trajectoire $(x(t), y(t))_{t\in\mathbb{R}}$ de (E) définie par $(x(t_0), y(t_0)) = (0, \beta)$ vérifie $(x(t_1), y(t_1)) = (1, 0)$ ($t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ sont les points de la question 4).

a - Montrer que, pour tout $0 < y_0 < \beta$, on a $\sigma(y_0)^2 - y_0^2 > 0$ (considérer $\sigma(y_0)^2 - y_0^2 = \int_{t_0}^{t_2} \frac{d}{dt}(x(t)^2 + y(t)^2)dt$).

b - Question difficile. Montrer que si $y_0 > \beta$, la fonction $y_0 \mapsto \sigma(y_0)^2 - y_0^2$ est décroissante. Pour cela, on écrira $\int_{t_0}^{t_2} x(t)^2(1 - x(t)^2)dt = \int_{t_0}^{\tau_1} x(t)^2(1 - x(t)^2)dt + \int_{\tau_1}^{\tau_2} x(t)^2(1 - x(t)^2)dt + \int_{\tau_2}^{t_2} x(t)^2(1 - x(t)^2)dt$, avec $t_0 < \tau_1 < \tau_2 < t_2$, $0 < x(\tau) < 1$ sur $]t_0, \tau_1[$ et sur $]\tau_2, t_2[$, $x(\tau) > 1$ sur $]\tau_1, \tau_2[$. Sur $]t_0, \tau_1[$, on effectue le changement de variable $t = \phi(x)$, sans chercher à expliciter ϕ, et on obtient $\int_{t_0}^{\tau_1} x(t)^2(1 - x(t)^2)dt = \int_0^1 \frac{x^2(1-x^2)}{y(\phi(x))-x^3+x}dx$. Pour être précis, il faut écrire $y(\phi(x; y_0))$ à la place de $y(\phi(x))$. Pour $x \in]0, 1[$ fixé, on vérifie que $y_0 \mapsto y(\phi(x; y_0))$ est croissante. Cela permet d'analyser le terme $\int_{t_0}^{\tau_1} x(t)^2(1 - x(t)^2)dt$. Sur $]\tau_1, \tau_2[$, on effectue le changement de variable $t = \psi(y)$, et sur $]\tau_2, t_2[$, on effectue le changement de variable $t = \phi(x)$. On peut alors conclure!!

7 - En déduire qu'il existe une trajectoire $\mathcal{T}$ unique correspondant à des solutions périodiques. Montrer de plus que les trajectoires $(x(t), y(t))_{t\in\mathbb{R}}$, non réduites à $(0, 0)$, vérifient $\lim_{t\to\infty} d((x(t), y(t)), \mathcal{T}) = 0$.

Exercice 4. Considérons le système de Lotka-Volterra décrivant l'évolution d'un modèle proies-prédateurs

$$(LV) \qquad \begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= N(a - bP), \\ \frac{dP}{dt} &= P(cN - d), \end{aligned}$$

où a, b, c et d sont des constantes positives.

En posant $u(\tau) = \frac{cN(t)}{d}$, $v(\tau) = \frac{bP(t)}{a}$, $\tau = at$, $\alpha = d/a$, montrer que (u, v) est solution du système

$$(LV_a) \qquad \begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= u(1 - v), \\ \frac{dv}{d\tau} &= \alpha v(u - 1). \end{aligned}$$

On recherche les solutions de (LV_a) telles que $u(t) > 0$, $v(t) > 0$. On appelle intégrale première de (LV_a) sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ une fonction $H(u, v)$, constante le long des trajectoires de (LV_a) qui vivent dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$. On recherchera H sous la forme $H(u, v) = F(u) + G(v)$. Soit $(u, v)_{t\in[0,T_m[}$, une solution maximale de (LV_a) dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$. Montrer que cette solution est globale. Montrer que cette solution est périodique.

Exercice 5. (*Comportement asymptotique*) Soit g une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^1, telle que $g(0) = g(1) = 0$ et $g(x) < 0$ pour tout $0 < x < 1$.

1 - Soit $0 < x_0 < 1$ et soit x une solution sur $[0, T[$ du problème $x(0) = x_0$, $x' = g(x)$. Montrer que $0 < x(t) < 1$ pour tout $t \in [0, T[$. En déduire que le problème $x(0) = x_0$, $x' = g(x)$ admet une solution globale unique sur $[0, \infty[$. Montrer que cette solution vérifie $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$.

2 - On suppose que $g'(0) = -\alpha < 0$. Montrer que, pour tout $0 < \beta < \alpha$, il existe une constante $C > 0$ telle que $x(t) \le Ce^{-\beta t}$ pour tout $t \ge 0$. (x est la solution de la question 1.)

Exercice 6. Soient a, b des constantes positives, et $x_0 > 0$, $y_0 > 0$ donnés. Considérons le système différentiel

$$\begin{array}{rcl} x' & = & -(b+1)x + x^2y + a, \quad t \geq 0, \\ y' & = & bx - x^2y, \quad t \geq 0, \\ x(0) & = & x_0, \quad y(0) = y_0. \end{array} \tag{1.6}$$

Dans la suite, on note (x, y) une solution maximale sur $[0, T_m[$.

1 - Soit $\bar{t} \in [0, T_m[$ tel que $x(\bar{t}) = 0$. Montrer que $x'(\bar{t}) > 0$, puis que $x(t) > 0$ pour tout $t \in [0, T_m[$. Montrer de même que $y(t) > 0$ pour tout $t \in [0, T_m[$.

2 - Montrer que $(x + y)'(t) \leq a$ pour tout $t \in [0, T_m[$. En déduire que $T_m = \infty$.

3 - Remarquer que $x'(t) \geq -(b+1)x(t) + a$ pour tout $t \in [0, \infty[$. Calculer la dérivée de $t \mapsto x(t)e^{(b+1)t}$. Montrer que, pour tout $0 < \gamma < \frac{a}{b+1}$, il existe $T_\gamma > 0$, indépendant de $x_0 > 0$ et de $y_0 > 0$, tel que $x(t) \geq \gamma$ pour tout $t \geq T_\gamma$.

4 - Soit $0 < \gamma < \frac{a}{b+1}$, et soit $T_\gamma > 0$ défini à la question 3. Montrer que si $t \geq T_\gamma$, et $y(t) > \frac{b}{\gamma}$, alors $y'(t) < 0$. En déduire que $y(t) \leq S_\gamma = \max(y(T_\gamma), \frac{b}{\gamma})$ pour tout $t \in [T_\gamma, \infty[$.

5 - Soit $0 < \gamma < \frac{a}{b+1}$, et soit $T_\gamma > 0$ défini à la question 3. Montrer que si pour tout $t \geq T_\gamma$, on a $y(t) > \frac{b}{\gamma}$, alors y est décroissante sur $[T_\gamma, \infty[$, et $y(t) \to \frac{b}{\gamma}$ quand $t \to \infty$.

6 - Soit $0 < \gamma < \frac{a}{b+1}$, soit $T_\gamma > 0$ défini à la question 3, et soit $S_\gamma > 0$ défini à la question 4. Montrer que si $t \geq T_\gamma$, alors $(x + y)(t) \leq (x + y)(T_\gamma) + S_\gamma + a$.

7 - Montrer que pour tout $A > 0$, il existe $C(A) > 0$, telle que si $0 < x_0 < A$ et $0 < y_0 < A$, alors $0 < x(t) < C(A)$ et $0 < y(t) < C(A)$ pour tout $t \in [0, \infty[$.

Chapitre 2

Dépendance des solutions

2.1 Inégalité de Gronwall

Théorème 2.1.1 *Soient $a < b$ deux réels, ϕ et ψ des fonctions positives ou nulles et continues sur $[a, b]$ et $\alpha \in \mathbb{R}^+$. Si, pour tout $t \in [a, b]$,*

$$\phi(t) \leq \alpha + \int_a^t \psi(s)\phi(s)ds,$$

alors

$$\phi(t) \leq \alpha \; exp(\int_a^t \psi(s)ds) \quad \textit{pour tout } t \in [a, b].$$

Preuve. Supposons que $\alpha > 0$. On réécrit l'hypothèse sous la forme

$$\phi(t)\psi(t)(\alpha + \int_a^t \psi(s)\phi(s)ds)^{-1} \leq \psi(t),$$

pour tout $t \in [a, b]$. Par intégration entre a et t on obtient

$$\ell n\Big(\alpha + \int_a^t \psi(s)\phi(s)ds\Big) - \ell n(\alpha) \leq \int_a^t \psi(s)ds.$$

On en déduit

$$\phi(t) \leq \alpha + \int_a^t \psi(s)\phi(s)ds \leq \alpha \; exp\Big(\int_a^t \psi(s)ds\Big).$$

Si $\alpha = 0$, on remplace α par $\alpha + \varepsilon > 0$ et on passe à la limite quand ε tend vers zéro.

Nous énonçons ci-dessous une forme plus générale de l'inégalité de Gronwall.

Théorème 2.1.2 *Soient $a < b$ deux réels positis ou nuls, α, ϕ et ψ des fonctions positives ou nulles et continues sur $[a, b]$. Soit $t_0 \in [a, b]$. Si, pour tout $t \in [a, b]$,*

$$\phi(t) \leq \alpha(t) + \Big|\int_{t_0}^t \psi(s)\phi(s)ds\Big|,$$

alors

$$\phi(t) \leq \alpha(t) + \Big|\int_{t_0}^t \alpha(s)\psi(s)exp(|\int_s^t \psi(\tau)d\tau|)ds\Big| \quad \textit{pour tout } t \in [a, b].$$

Si de plus α est une fonction croissante alors

$$\phi(t) \leq \alpha(t) + exp(|\int_{t_0}^{t} \psi(\tau)d\tau|) \quad \textit{pour tout } t \in [a,b].$$

2.2 Dépendance continue

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, Λ un ouvert de $\mathbb{R}^m$, f une application continue de $I \times U \times \Lambda$ dans $\mathbb{R}^n$. On s'intéresse à la dépendance des solutions du système différentiel

$$(E_\lambda) \qquad x'(t) = f(t, x(t), \lambda)$$

par rapport à $\lambda \in \Lambda$, et par rapport aux conditions initiales $x(t_0) = x_0$.

Soit $(t_0, x_0, \lambda_0) \in I \times U \times \Lambda$, on choisit $T_0 > 0$ $r > 0$, $\rho > 0$, tels que $V_0 = [t_0 - T_0, t_0 + T_0] \times \bar{B}(x_0, r) \times \bar{B}(\lambda_0, \rho) \subset I \times U \times \Lambda$, et on pose $M = \max_{V_0} |f|$. Soit $T = \min(T_0, r/M)$. On vérifie aisément que, pour tout $\lambda \in \bar{B}(\lambda_0, \rho)$, $C = [t_0 - T, t_0 + T] \times \bar{B}(x_0, r)$ est un cylindre de sécurité pour (E_λ). Plus précisément, on démontre le théorème suivant.

Théorème 2.2.1 *Si f continue sur $I \times U \times \Lambda$, Lipschitzienne en x, uniformément par rapport à (t, λ), alors pour tout $(t_0, x_0, \lambda_0) \in I \times U \times \Lambda$, il existe $T > 0$, $r > 0$, $\rho > 0$ vérifiant $[t_0 - T, t_0 + T] \times \bar{B}(x_0, r) \times \bar{B}(\lambda_0, \rho) \subset I \times U \times \Lambda$, tels que pour tout $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{\lambda}) \in I \times U \times \Lambda$, le système*

$$x'(t) = f(t, x(t), \bar{\lambda}) \qquad x(\bar{t}) = \bar{x}$$

admet une solution unique $x(\cdot; \bar{x}, \bar{t}, \bar{\lambda})$. L'application $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{\lambda}) \mapsto x(\cdot; \bar{x}, \bar{t}, \bar{\lambda})$ est continue de $[t_0 - T, t_0 + T] \times \bar{B}(x_0, r) \times \bar{B}(\lambda_0, \rho)$ dans $C([t_0 - T, t_0 + T]; \mathbb{R}^n)$.

Si de plus f est de classe C^1 sur $I \times U \times \Lambda$, alors l'application $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{\lambda}) \mapsto x(\cdot; \bar{x}, \bar{t}, \bar{\lambda})$ est de classe C^1.

Dans le cas de perturbations d'un type particulier les résultats précédents peuvent être précisés.

Théorème 2.2.2 *Soit f une fonction continue sur $[t_0, t_0 + T] \times \mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, Lipschitzienne de rapport k par rapport à x, uniformémemt en $t \in \mathbb{R}$, et soit g une fonction continue sur $[t_0, t_0 + T]$, à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Soient $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $y_0 \in \mathbb{R}^n$. Pour $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère le problème*

$$(C_{\varepsilon\lambda}) \qquad x(t_0) = x_0 + \varepsilon y_0, \qquad x'(t) = f(t, x(t)) + \lambda g(t).$$

Si $x_{\varepsilon\lambda}$ désigne la solution de $(C_{\varepsilon\lambda})$ et x la solution de (C_{00}), alors

$$|x(t) - x_{\varepsilon\lambda}(t)| \leq |\varepsilon y_0| exp(k(t - t_0)) + \int_{t_0}^{t} |\lambda g(s)| exp(k(t - s)) ds,$$

pour tout $t \in [t_0, t_0 + T]$.

Chapitre 3

Systèmes différentiels linéaires autonomes

Les sections 3.1 à 3.4 constituent des rappels de licence.

3.1 Résolvante d'un système linéaire autonome

Soit $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, on souhaite calculer la résolvante du système $X' = AX$. La matrice fondamentale spéciale en zéro est la solution de $M' = AM$, $M(0) = I$. Calculons M par la méthode de Picard. La suite des itérés correspond à

$$\begin{aligned} &M_0 = I, \\ &M_1 = I + A\int_0^t M_0(\tau)d\tau = I + tA, \\ &\qquad\vdots \\ &M_n = I + A\int_0^t M_{n-1}(\tau)d\tau = I + \Sigma_{k=1}^n \frac{t^k}{k!}A^k. \end{aligned}$$

Proposition 3.1.1 *Posons $S_n = \Sigma_{k=0}^n \frac{t^k}{k!}A^k$. La suite $(S_n)_n$ converge dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Sa limite est notée e^{tA}.*

Preuve. Le résultat découle de la majoration

$$\|S_n - S_m\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)} \leq \Sigma_{k=n+1}^m \frac{t^k}{k!}\|A\|^k \leq e^{t\|A\|}.$$

Proposition 3.1.2 *L'opérateur* **'exponentielle de matrice'** *défini dans la proposition précédente vérifie les propriétés suivantes*

$$\begin{aligned} &e^{\mathbf{O}_n} = \mathbf{I}_n, \\ &e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA} \text{ pour tout } s \in \mathbb{R} \text{ et tout } t \in \mathbb{R}, \\ &(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}, \\ &\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA} = e^{tA}A. \end{aligned}$$

Lemme 3.1.1 *Si les séries $\Sigma_{n=0}^\infty A_n$ et $\Sigma_{n=0}^\infty B_n$ sont absolument convergentes dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ alors la série de terme général $S_n = \Sigma_{k=0}^n A_{n-k}B_k$ est absolument convergente et sa somme est $(\Sigma_{n=0}^\infty A_n)(\Sigma_{n=0}^\infty B_n)$.*

Corollaire 3.1.1 *Soit $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. La résolvante du système $X' = AX$ est*
$$R(t,s) = e^{(t-s)A}$$

3.2 Calcul de e^{tA}

On considère tout d'abord le cas où $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ les k valeurs propres de A de multiplicité algébrique $m_1, \ldots, m_k$. Le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_i est $\mathrm{Ker}(A - \lambda_i I)$. Le sous-espace propre généralisé associé à la valeur propre λ_i est $\mathrm{Ker}[(A - \lambda_i I)^{m_i}]$.

Théorème 3.2.1 *Soit $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ les k valeurs propres de A de multiplicité algébrique $m_1, \ldots, m_k$, et soient $E_1, \ldots, E_k$ les sous-espaces propres généralisés de A. L'espace $\mathbb{C}^n$ est somme directe des sous-espaces propres généralisés :*
$$\mathbb{C}^n = E_1 \oplus \ldots \oplus E_k.$$

Théorème 3.2.2 *Soit $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ les k valeurs propres de A de multiplicité algébrique $m_1, \ldots, m_k$, et soient $E_1, \ldots, E_k$ les sous-espaces propres généralisés de A. Pour tout $1 \leq i \leq k$, le sous-espace propre généralisé E_i est globalement invariant par A, c'est à dire vérifie $AE_i \subset E_i$.*

Corollaire 3.2.1 *Soit $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ les k valeurs propres de A de multiplicité algébrique $m_1, \ldots, m_k$, et soient $E_1, \ldots, E_k$ les sous-espaces propres généralisés de A. Il existe une matrice P inversible telle que*
$$A = P \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & B_k \end{pmatrix} P^{-1},$$
où B_i est un bloc $m_i \times m_i$. De plus, si Π_i désigne l'opérateur de projection sur E_i parallèlement à $\oplus_{j \neq i} E_j$, alors $\Pi_i e^{tA} = e^{tA}\Pi_i = e^{tA_i}$, avec $A_i = \Pi_i A$.

Proposition 3.2.1 *Si*
$$A = P \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & B_k \end{pmatrix} P^{-1},$$
alors
$$e^{tA} = P \begin{pmatrix} e^{tB_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^{tB_k} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Le calcul de e^{tA} se ramène donc au calcul de e^{tB} où $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^m)$, avec $\mathbb{C}^m = \mathrm{Ker}(B - \lambda I)^m$.

Définition 3.2.1 *On appelle bloc de Jordan d'ordre β, une matrice $\beta \times \beta$ de la forme*
$$J(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Théorème 3.2.3 *(Théorème de Jordan) Si $B \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^m)$, avec $\mathbb{C}^m = Ker(B - \lambda I)^m$ et si $\beta \leq m$ est le plus petit entier tel que $\mathbb{C}^m = Ker(B - \lambda I)^\beta$, alors il existe une base de $\mathbb{C}^m$ dans laquelle la matrice de B est de la forme*

$$\begin{pmatrix} J_1(\lambda) & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & J_\gamma(\lambda) \end{pmatrix},$$

où le nombre γ de blocs de Jordan est $\gamma = \dim(\mathrm{Ker}(B - \lambda I))$, et l'ordre du plus grand bloc est égal à β.

Théorème 3.2.4 *Soit B une fonction continue sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. La solution du système*

$$X' = AX + B, \qquad X(t_0) = X_0,$$

est

$$X(t) = e^{(t-t_0)A}X_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-s)A}B(s)ds.$$

3.3 Méthode pratique de résolution de $X' = AX$

Soit $A \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$, et soient $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ les k valeurs propres de A de multiplicité algébrique $m_1, \dots, m_k$. Pour déterminer la forme générale des solutions de l'équation $X' = AX$, on utilise la décomposition

$$\mathbb{C}^n = E_1 \oplus \dots \oplus E_k.$$

où E_i est le sous-espace propre généralisé associé à λ_i.

Théorème 3.3.1 *Soit $\xi \in \mathbb{C}^n$, $\xi = \xi_1 + \dots + \xi_k$, avec $\xi_i \in E_i$. Alors la solution de $X' = AX$, $X(0) = \xi$ est*

$$X(t) = e^{tA}\xi = e^{\lambda_1 t}P_1(t) + \dots + e^{\lambda_k t}P_k(t),$$

où P_j est un polynôme vectoriel de degré au plus $m_j - 1$, défini par

$$P_j(t) = [I + t(A - \lambda_j I) + \dots + \frac{t^{m_j-1}}{(m_j-1)!}(A - \lambda_j I)^{m_j-1}]\xi_j.$$

Preuve. Nous avons

$$X(t) = e^{tA}\xi = e^{tA}\xi_1 + \dots + e^{tA}\xi_k,$$

et

$$e^{tA}\xi_j = e^{\lambda_j tI + t(A-\lambda_j I)}\xi_j = e^{\lambda_j t}e^{t(A-\lambda_j I)}\xi_j.$$

Étant donné que $(A - \lambda_j I)^{m_j}\xi_j = 0$, on a

$$e^{t(A-\lambda_j I)}\xi_j = \Sigma_{p=0}^{m_j-1}\frac{t^p}{p!}(A - \lambda_j I)^p\xi_j = P_j(t).$$

Le théorème est donc démontré.

Corollaire 3.3.1 *Si les vecteurs $(e_{ij})_{1 \leq i \leq m_j}$ forment une base de E_j, alors*

$$P_{ij}(t) = e^{\lambda_j t}\Sigma_{p=0}^{m_j-1}\frac{t^p}{p!}(A - \lambda_j I)^p e_{ij}, \quad 1 \leq j \leq k, \quad 1 \leq i \leq m_j,$$

forment une base de l'espace S des solutions du système $X' = AX$.

3.4 Solutions réelles de $X' = AX$

Si A appartient à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, on identifie A à un opérateur de $\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$ (encore noté A, ou parfois noté $A_{\mathbb{C}}$). Notons $S_{\mathbb{C}}$ l'espace vectoriel (complexe) des solutions complexes de $X' = AX$, et $S_{\mathbb{R}}$ l'espace vectoriel réel des solutions réelles de $X' = AX$.

Si $X \in S_{\mathbb{C}}$, alors $\overline{X}' = \overline{AX} = A\overline{X}$, donc $\overline{X} \in S_{\mathbb{C}}$. Par conséquent $U = \mathrm{Re}(X)$ et $V = \mathrm{Im}(X)$ appartiennent à $S_{\mathbb{R}}$. D'un théorème de la section 3, on déduit que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est valeur propre de A, de multiplicité m, alors il existe m solutions linéairement indépendantes de $X' = AX$ de la forme

$$X(t) = e^{\lambda t}(b_0 + tb_1 + \ldots + t^{m-1}b_{m-1})$$

où $b_0 = \alpha \in \mathbb{C}^n$ est une des m racines du système linéaire $(A - \lambda I)^m \alpha = 0$, et $b_j = \frac{(A-\lambda I)^j}{j!}\alpha$. (Le système $(A - \lambda I)^m \alpha = 0$ a bien m solutions dans $\mathbb{C}^n$, linéairement indépendantes car $\dim(\mathrm{Ker}(A - \lambda I)^m) = m$.)

Si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors il est facile de voir que les m solutions de $(A - \lambda I)^m \alpha = 0$ peuvent être choisies dans $\mathbb{R}^n$. Les solutions définies précédemment sont alors réelles et elles constituent une famille libre de $S_{\mathbb{R}}$.

Si $\lambda \in \mathbb{C}$ et si $\mathrm{Im}\,\lambda \neq 0$, alors $\bar{\lambda}$ est aussi valeur propre de multiplicité m. De plus, on a $(A - \lambda I)^m \alpha = 0$ si, et seulement si, $(A - \bar{\lambda} I)^m \bar{\alpha} = 0$. Considérons m solutions linéairement indépendantes de $S_{\mathbb{C}}$, $X_1, \ldots, X_m$, de la forme $X_i(t) = e^{\lambda t} P_i(t)$, avec $P_i(0) = \alpha_i$,

$$\alpha_i \in Ker(A - \lambda I)^m, \quad P_i(t) = b_0^i + tb_1^i + \ldots + t^{m-1}b_{m-1}^i, \quad b_j^i = \frac{(A - \lambda I)^j}{j!}\alpha_i.$$

Alors $\overline{X}_1, \ldots, \overline{X}_m$ sont aussi m solutions linéairement indépendantes de $S_{\mathbb{C}}$, $\overline{X}_i(t) = e^{\bar{\lambda} t}\overline{P}_i(t)$, $\overline{P}_i(0) = \bar{\alpha}_i$, et $\bar{\alpha}_i \in Ker(A - \bar{\lambda} I)^m$. On peut vérifier que $U_i = \mathrm{Re}(X_i)$ et $V_i = \mathrm{Im}(X_i)$, pour $1 \leq i \leq m$, constituent $2m$ solutions réelles de $S_{\mathbb{C}}$. Si $\lambda = a + ib$, avec a et b réels, par combinaison des U_i et V_i on peut construire $2m$ solutions réelles, linéairement indépendantes, de la forme

$$e^{at}\cos(bt)(C_0 + C_1 t + \ldots + C_{m-1}t^{m-1}),$$
$$e^{at}\sin(bt)(D_0 + D_1 t + \ldots + D_{m-1}t^{m-1}),$$

où les coefficients C_i et D_i sont des vecteurs de dimension n.

3.5 Classification des flots du plan

Dans cette section on s'intéresse aux systèmes linéaires $X' = AX$ dans $\mathbb{R}^2$. Pour étudier les trajectoires dans le plan, nous distinguerons trois cas.

• A est diagonalisable. Dans ce cas il existe une base dans laquelle le système $X' = AX$ se transforme en

$$Y' = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} Y,$$

avec éventuellement $\lambda = \mu$.

• A admet une valeur propre de multiplicité 2, mais n'est pas diagonalisable. On considère alors le système

$$Y' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} Y.$$

• A admet deux valeurs propres complexes conjuguées : $\lambda = a - ib$ et $\bar{\lambda} = a + ib$.

Proposition 3.5.1 *Soit $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, et soit $\lambda = a - ib$ une valeur propre de A ($b \neq 0$). Alors il existe une matrice inversible P telle que*

$$A = P \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Preuve. On identifie A à un opérateur de $\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$. Soit $Z \in ker_{\mathbb{C}^2}(A - \lambda I)$. Alors $\bar{Z} \in ker_{\mathbb{C}^2}(A - \bar{\lambda} I)$. Donc $(Z, \bar{Z})$ est une base de $\mathbb{C}^2$, $Z = X + iY$, $\bar{Z} = X - iY$, avec $X \in \mathbb{R}^2$, $Y \in \mathbb{R}^2$. Comme $\lambda \notin \mathbb{R}$, on peut vérifier que (X, Y) est une base de $\mathbb{R}^2$. On a $AX = \frac{1}{2}A(Z + \bar{Z}) = \frac{1}{2}(\lambda Z + \bar{\lambda}\bar{Z}) = aX + bY$, et $AY = \frac{1}{2}A(Z - \bar{Z}) = \frac{1}{2}(\lambda Z - \bar{\lambda}\bar{Z}) = -bX + aY$. La matrice de A dans la base (X, Y) est $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Vérifions que (X, Y) est une base de $\mathbb{R}^2$. Supposons que $c_1 X + c_2 Y = 0$, avec $c_1 \in \mathbb{R}$, $c_2 \in \mathbb{R}$. Montrons que $c_1 = c_2 = 0$. La solution de condition initiale $c_1 X + c_2 Y$ est identiquement nulle. De plus cette solution est aussi égale à $c_1 e^{at}(\cos(bt)X + \sin(bt)Y) + c_2 e^{at}(-\sin(bt)X + \cos(bt)Y)$. En prenant $t = \pi/(2b)$, on obtient $c_1 Y - c_2 X = 0$. On en déduit $(c_1^2 + c_2^2)Y = 0$. Vu que $Y \neq 0$ (car $(Z, \bar{Z})$ est une base de $\mathbb{C}^2$), on a $c_1 = c_2 = 0$. □

3.5.1 Cas d'une matrice diagonale réelle

On considère le système

$$X' = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} X.$$

Les solutions sont de la forme

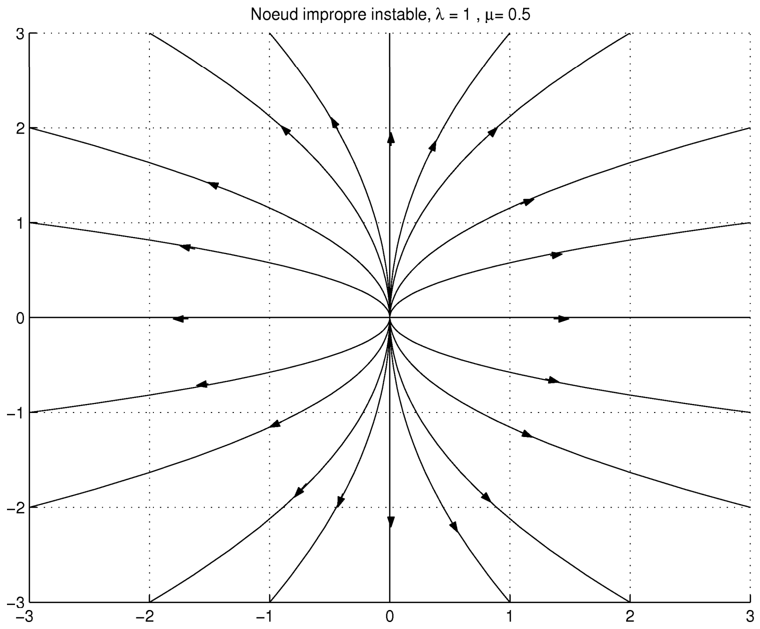
$$x_1(t) = x_{01} e^{\lambda t}, \quad x_2(t) = x_{02} e^{\mu t}.$$

On a donc

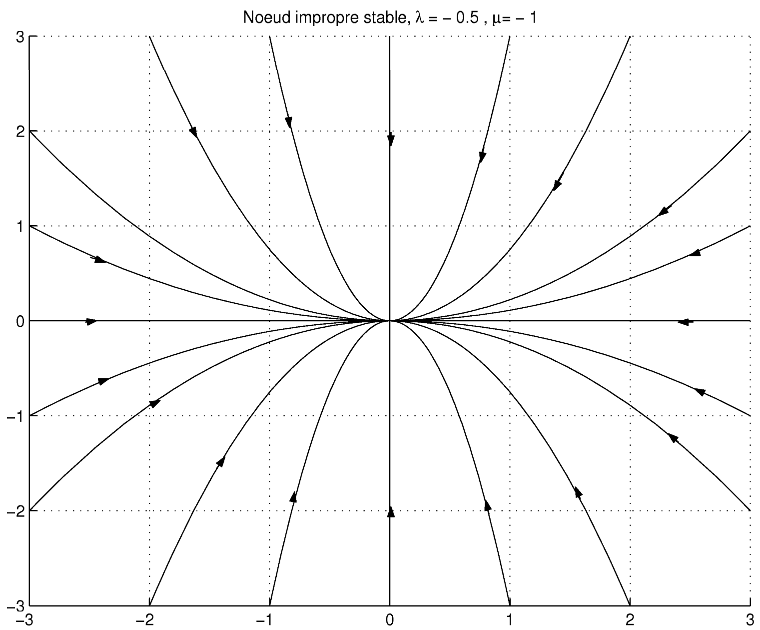
$$t = \frac{1}{\lambda} \ell n \left| \frac{x_1}{x_{01}} \right|,$$

i. e. $x_2 = C|x_1|^{\mu/\lambda}$.

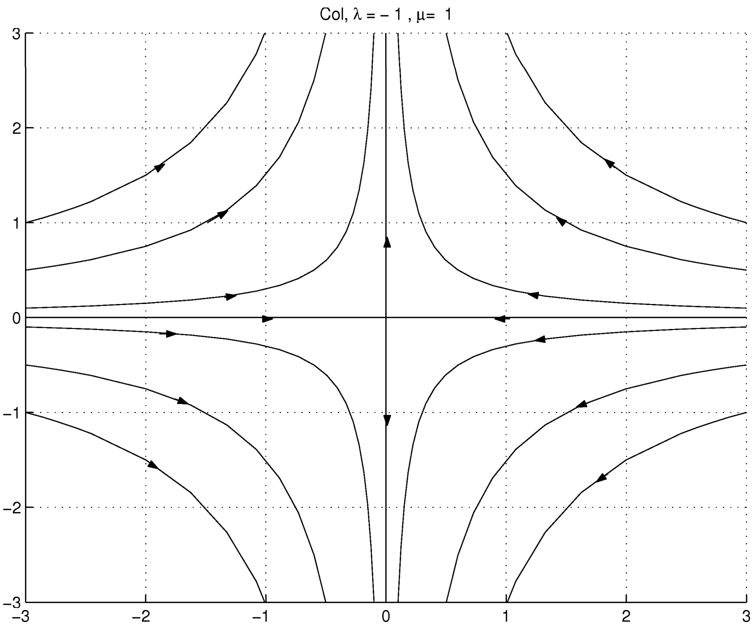
• Si $0 < \lambda < \mu$, $(0,0)$ est un noeud impropre instable.



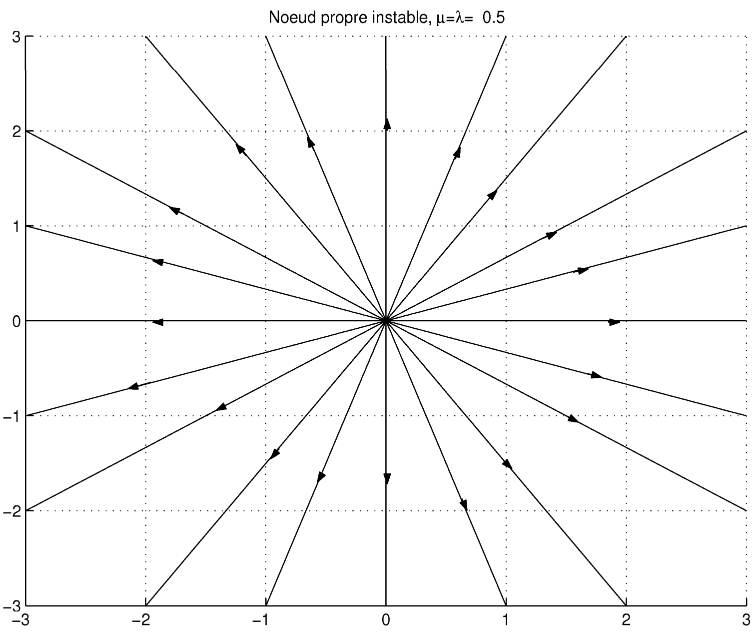
• Si $\mu < \lambda < 0$, $(0,0)$ est un noeud impropre stable.



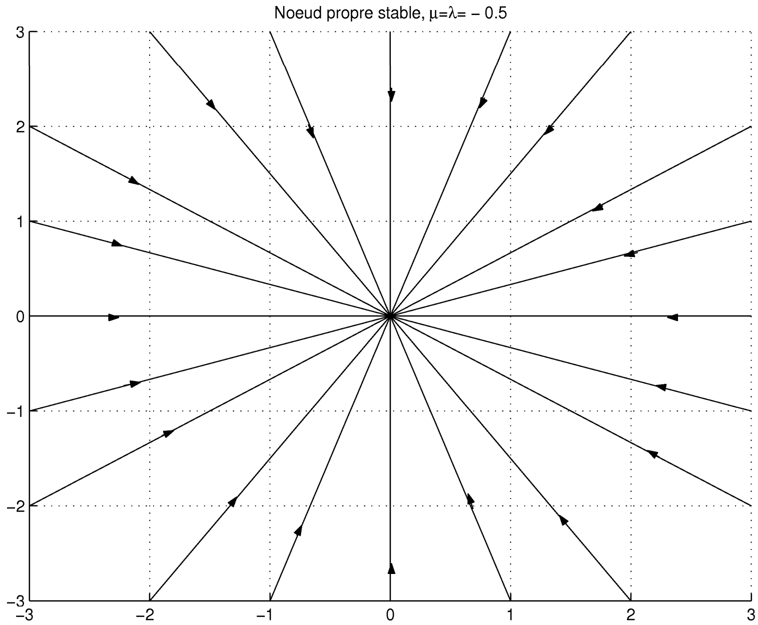
• Si $\lambda < 0 < \mu$, $(0,0)$ est un col (ou point selle).



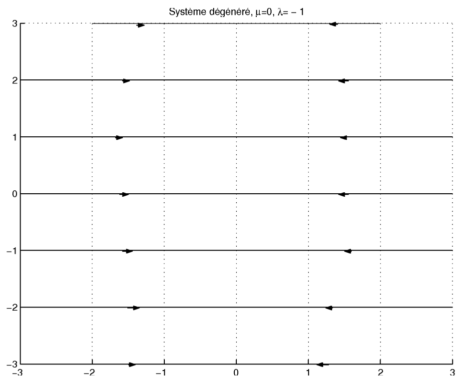
• Si $0 < \lambda = \mu$, $(0,0)$ est un noeud propre instable.



• Si $\mu = \lambda < 0$, $(0,0)$ est un noeud propre stable.



• Si $\mu = 0$ et $\lambda \neq 0$, le système est dégénéré.



3.5.2 Cas d'une matrice non diagonalisable

On considère le système

$$X' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} X,$$

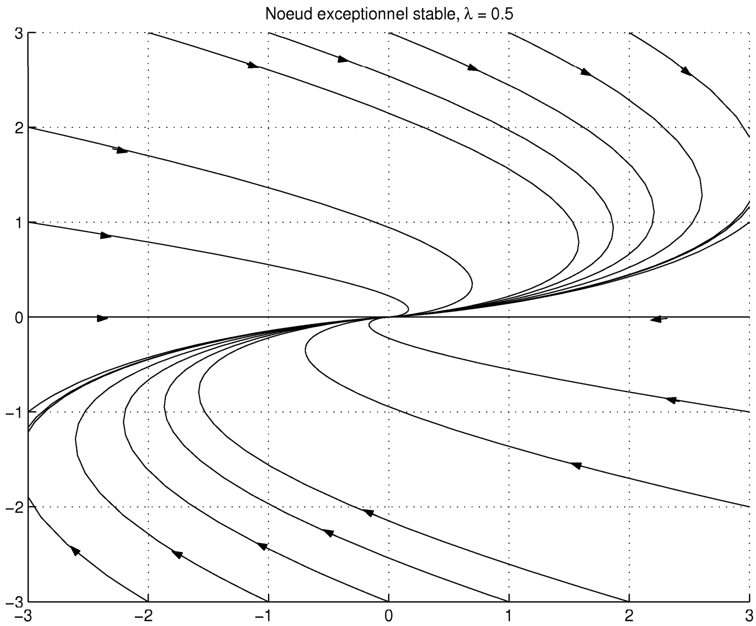
avec $\lambda \neq 0$. Les solutions sont de la forme

$$X(t) = \begin{pmatrix} (x_{02}t + x_{01})e^{\lambda t} \\ x_{02}e^{\lambda t} \end{pmatrix}.$$

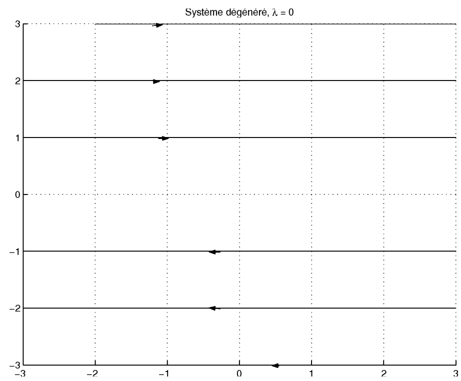
On a donc

$$t = \frac{1}{\lambda}\ell n\left|\frac{x_2}{x_{02}}\right| \qquad \text{et} \qquad x_1 = \frac{x_{02}}{\lambda}\left|\frac{x_2}{x_{02}}\right|\ell n\left|\frac{x_2}{x_{02}}\right| + x_{01}\left|\frac{x_2}{x_{02}}\right|.$$

Dans ce cas $(0,0)$ est un noeud impropre exceptionnel.



Si $\lambda = 0$, le système est dégénéré.



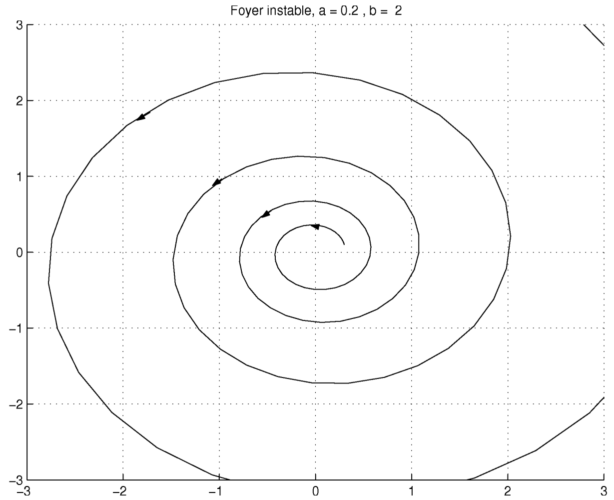
3.5.3 Cas de valeurs propres complexes conjuguées

On considère le système

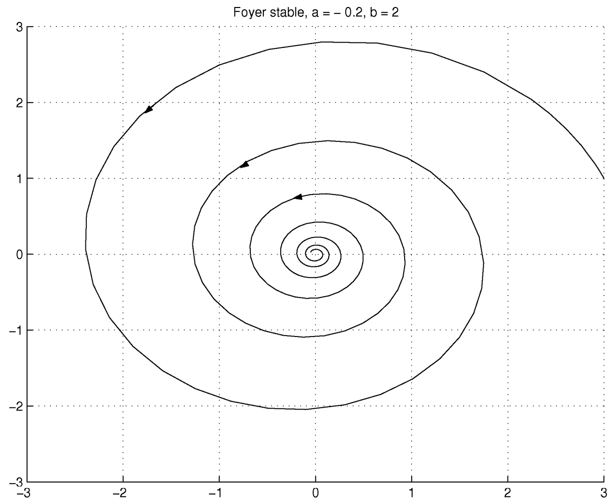
$$X' = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} X.$$

On suppose que $b \neq 0$. En posant $z = x_1 + ix_2$, on obtient $z' = x_1' + ix_2' = (a+ib)x_1 + (-b+ia)x_2 = (a+ib)z$. On a donc $z(t) = z_0 e^{at} e^{ibt}$, avec $z_0 = x_{01} + ix_{02}$. On pose $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$, $r(t) = r_0 e^{at}$, $\theta(t) = \theta_0 + bt$. On a donc $r = r_0 e^{\frac{a}{b}(\theta - \theta_0)}$. Si $a \neq 0$, les trajectoires sont donc des spirales. Si $a = 0$, les trajectoires sont des cercles.

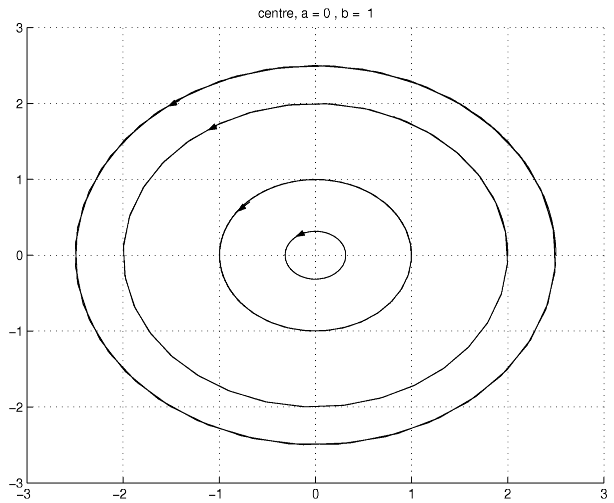
• Si $a > 0$ et $b > 0$, alors $(0,0)$ est un foyer instable.



• Si $a < 0$ et $b > 0$, alors $(0,0)$ est un foyer stable.



• Si $a = 0$ et $b \neq 0$, $(0,0)$ est un centre.



Les résultats de cette section peuvent être résumés dans le théorème suivant.

Théorème 3.5.1 *Soit* $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, $\delta = det(A)$, $\tau = trace(A)$.
(a) Si $\delta < 0$, *l'origine est un point selle du système* $X' = AX$.
(b) Si $\delta > 0$ *et* $\tau^2 - 4\delta \geq 0$, *l'origine est un noeud du système* $X' = AX$. *C'est un noeud stable si* $\tau < 0$, *instable si* $\tau > 0$.
(c) Si $\delta > 0$ *et* $\tau^2 - 4\delta < 0$, *l'origine est un foyer du système* $X' = AX$. *C'est un foyer stable si* $\tau < 0$, *instable si* $\tau > 0$.
(d) Si $\delta > 0$ *et* $\tau = 0$, *l'origine est un centre du système* $X' = AX$.

Preuve. On a $det(A - \lambda I) = \lambda^2 - \tau\lambda + \delta$. Si $\tau^2 - 4\delta \geq 0$, les valeurs propres de A sont $(\tau + \sqrt{\tau^2 - 4\delta})/2$ et $(\tau - \sqrt{\tau^2 - 4\delta})/2$.

Si $\delta < 0$ les valeurs propres sont nécessairement réelles et de signes opposés.

Si $\delta > 0$ et si $\tau^2 - 4\delta \geq 0$, les deux valeurs propres sont réelles et toutes les deux sont du signe de τ.

Si $\delta > 0$, $\tau^2 - 4\delta < 0$, et $\tau \neq 0$, alors les deux valeurs propres sont complexes conjuguées.

Si $\delta > 0$, et $\tau = 0$, alors les deux valeurs propres sont imaginaires pures.

3.6 Comportement asymptotique

On s'intéresse au comportement des solutions du système $X' = AX$ quand $t \to \infty$.

Théorème 3.6.1 *Soient* $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ *les valeurs propres (distinctes) de* A, *de multiplicité algébrique* $m_1, \ldots, m_k$.
(i) Les solutions du système $X' = AX$ *sont bornées sur* $\mathbb{R}^+$ *si et seulement si, pour tout* $j = 1, \ldots, k$, *on a :*

$$Re(\lambda_j) < 0 \quad ou \quad \Big(\ Re(\lambda_j) = 0 \ et \ m_j = dim\ Ker(A - \lambda_j I)\ \Big).$$

(ii) Les solutions du système $X' = AX$ *tendent vers zéro quand* t *tend vers l'infini si et seulement si* $Re(\lambda_j) < 0$ *pour tout* $j = 1, \ldots, k$.

Preuve.
Preuve de (i). Supposons que pour tout $j = 1, \ldots, k$, $Re(\lambda_j) < 0$ ou $\Big(\ Re(\lambda_j) = 0 \ et \ m_j = dim\ Ker(A - \lambda_j I)\ \Big)$. Soit P une matrice inversible telle que $A = P\ diag(J_1, \ldots, J_q)\ P^{-1}$, où $J_1, \cdots, J_q$ sont des blocs de Jordan. Posons $J = diag(J_1, \ldots, J_q)$, les colonnes $X_1, \ldots, X_n$ de $X(t) = Pe^{tJ}$ forment une base de l'espace des solutions du système $X' = AX$. De plus, X_i est de la forme $X_i(t) = e^{\lambda_j t}Q(t)$, où $Q(t) = \alpha \in \mathbb{C}^n$, $\alpha \neq 0$, si $Re(\lambda_j) = 0$, et $Q(t)$ est un polynôme de degré au plus égal à $m_j - 1$ si $Re(\lambda_j) < 0$. Dans les deux cas il est facile de montrer que $|X_i(t)|$ reste borné pour $t \in \mathbb{R}^+$.

Réciproque. Si une des valeurs propres λ_j est telle que $Re(\lambda_j) > 0$, on pose $X(t) = e^{\lambda_j t}\alpha$ avec $\alpha \in ker(A - \lambda_j I)$, $\alpha \neq 0$. On remarque que X est solution de $X' = AX$ et $|X(t)| = e^{Re(\lambda_j)t}|\alpha| \to \infty$ quand $t \to \infty$.

Si une des valeurs propres λ_j est telle que $Re(\lambda_j) = 0$ et $dim\ ker(A - \lambda_j I) < m_j$, alors il existe un bloc de Jordan J_r associé à λ_j, de dimension $d_j \times d_j$ avec $d_j > 1$. Dans ce cas, il existe une solution de la forme $X(t) = e^{\lambda_j t}(\alpha + t\beta)$, $\alpha \in ker(A - \lambda_j I)$ et $\beta \neq 0$. On a $|X(t)| = |\alpha + t\beta| = t|\frac{\alpha}{t} + \beta| \geq t(-\frac{|\alpha|}{t} + |\beta|) \to \infty$ quand $t \to \infty$.

Preuve de (ii). Si la condition (ii) est vérifiée, il est facile de montrer que toutes les solutions convergent vers zéro quand t tend vers l'infini. Réciproquement, si l'une des valeurs propres est telle que $Re(\lambda_j) \geq 0$, on pose $X(t) = e^{\lambda_j t}\alpha$ avec $\alpha \in ker(A - \lambda_j I)$, $\alpha \neq 0$. On remarque que X est solution de $X' = AX$. Si $Re(\lambda_j) > 0$, alors $|X(t)| \to \infty$ quand $t \to \infty$. Si $Re(\lambda_j) = 0$, alors $|X(t)| = |\alpha|$. $\square$

3.7 Sous-espace stable, instable et central

Soit $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, et soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ k valeurs propres réelles de A (répétées avec leur ordre de multiplicité), et pour $k + 1 \leq j \leq (n - k)/2$, $\lambda_j = a_j + ib_j$ et $\bar{\lambda}_j = a_j - ib_j$ $n - k$ valeurs propres complexes conjuguées de A (répétées avec leur ordre de multiplicité).

Notons $u_1, \ldots, u_k$ des vecteurs propres généralisés associés aux valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, et $u_j + iv_j$, $u_j - iv_j$ des vecteurs propres généralisés associés aux valeurs propres λ_j, $\bar{\lambda}_j$ pour $k + 1 \leq j \leq (n - k)/2$, tels que $(u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}, v_{k+1}, \ldots, u_{(n-k)/2}, v_{(n-k)/2})$ forment une base de $\mathbb{R}^n$.

Pour $1 \leq j \leq n$, posons $\lambda_j = a_j + ib_j$, avec $b_j = 0$ si $1 \leq j \leq k$. Par convention posons $v_j = 0$ si $1 \leq j \leq k$. On définit les sous-espaces stable, central et instable de la façon suivante :

$$E_s = \text{vect}\{u_j, v_j \mid a_j < 0\},$$

$$E_c = \text{vect}\{u_j, v_j \mid a_j = 0\},$$

$$E_u = \text{vect}\{u_j, v_j \mid a_j > 0\}.$$

Théorème 3.7.1 *Les sous-espaces E_s, E_c et E_u sont globalement invariants par le flot e^{tA}, et $\mathbb{R}^n = E_s \oplus E_c \oplus E_u$.*

Pour tout $x_0 \in E_s$, $lim_{t\to\infty} e^{tA}x_0 = 0$.

Pour tout $x_0 \in E_u$, $lim_{t\to-\infty} e^{tA}x_0 = 0$.

Si A est semi-simple, pour tout $x_0 \in E_c$, $(e^{tA}x_0)_{t\in\mathbb{R}}$ est borné.

3.8 Exercices

Exercice 1. Soit $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, et soient λ_1, λ_2, λ_3 les trois valeurs propres complexes de A. Déterminer les trajectoires de l'espace des phases du système $X' = AX$ dans les cas suivants
1 - $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0$,
2 - $\lambda_3 < 0$, $\lambda_1 = a + ib$, $a < 0$, $b > 0$,
3 - $\lambda_3 < 0$, $\lambda_1 = a + ib$, $a > 0$, $b > 0$,
4 - $\lambda_1 < \lambda_2 < 0 < \lambda_3$.

Exercice 2. Soit $(X(t))_{t\in\mathbb{R}}$ une trajectoire dans $\mathbb{R}^n$ du système linéaire $X' = AX$. Soit N une matrice inversible $n \times n$. Posons $Y(t) = NX(t)$. Quel est le système différentiel vérifié par Y. Montrer que si $\lim_{t\to\infty} X(t) = 0$, alors $\lim_{t\to\infty} Y(t) = 0$. On suppose que $n = 2$. Montrer que si 0 est un point selle du système $X' = AX$, alors c'est aussi un point selle du système vérifié par Y.

Exercice 3. (*Exponentielle de certaines matrices*) Calculer e^{tJ} lorsque J est l'une des matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} 0_n & I_n \\ -I_n & 0_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0_n & \Lambda_n \\ -\Lambda_n & 0_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0_n & A \\ -A & 0_n \end{pmatrix},$$

où I_n est la matrice identité de $\mathbb{R}^n$, et 0_n est la matrice nulle, $\Lambda_n = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, A est une matrice réelle, symétrique, définie positive.

Exercice 4. On considère le problème de Cauchy

$$X' = JX, \quad X(0) = (0, b, c)^T,$$

avec $b > 0$, $c > 0$, $J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$, et $\lambda_0 > 0$.

Notons $(X(t))_{t\in\mathbb{R}}$ la solution de ce problème de Cauchy.
1 - Déterminer les trajectoires du système

$$\begin{pmatrix} Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix}.$$

En déduire la trajectoire $(X_2(t), X_3(t))_{t\in\mathbb{R}}$ dans le plan X_2X_3.
2 - Calculer X_3, puis déterminer la trajectoire $(X_1(t), X_2(t))_{t\in\mathbb{R}}$ dans le plan X_1X_2.
3 - Représenter la trajectoire $(X(t))_{t\in\mathbb{R}}$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5. (*Comportement asymptotique*) Calculer la solution générale du système

$$x' = y + z, \quad y' = z + x, \quad z' = x + y.$$

Quel est le comportement des solutions quand $t \to \pm\infty$.

Exercice 6. Considérons le système différentiel

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\alpha & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Déterminer, en fonction des valeurs de α, les dimensions du sous-espace stable, du sous-espace instable, et du sous-espace central du système précédent.

Exercice 7. Considérons le système différentiel

$$(S) \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Déterminer, en fonction des valeurs de α, la nature du point $(0,0)$ pour le système (S) (noeud propre stable, instable, point selle....).

Exercice 8. (*Critère de stabilité asymptotique de Routh-Hurwith*) Un polynôme $P(\lambda) = \Sigma_{j=0}^{n} a_j \lambda^{n-j}$, $a_0, ..., a_n \in \mathbb{C}$ est stable si toutes ses racines appartiennent au demi-plan complexe $\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re} z < 0\}$.

1 - Soit $P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$. Démontrer que P est stable si, et seulement si, $a > 0$, $b > 0$.

2 - Soit $P(\lambda) = \Sigma_{j=0}^{n} a_j \lambda^{n-j}$, $a_0, ..., a_n \in \mathbb{R}$, et $a_0 > 0$. Montrer que si $P(\lambda)$ est stable, alors a_i pour $i = 1, ..., n$.

3 - Soit $P(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3$, avec $a_i \in \mathbb{R}$ pour $i = 1, 2, 3$. Montrer que si $P(\lambda)$ est stable alors $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $a_3 > 0$, et $a_1 a_2 - a_3 > 0$. La réciproque est aussi vraie, et est ici admise (cf W. Hahn, Stability of motion, Springer, 1967, p. 16-18). La généralisation de ce résultat au cas $n \geq 3$ est connu sous le nom de critère de stabilité de Routh-Hurwith.

Exercice 9. (*Le pendule simple*) Expliquer comment sont otenues les équations du pendule simple

$$(E) \qquad \theta'' = -\frac{g}{\ell} \sin\theta.$$

Déterminer une intégrale première de (E). Déterminer un domaine D tel que pour toute condition intiale $(\theta(0), \theta'(0)) \in D$, la solution correspondante de (E) reste bornée.

(*Le pendule amorti*) Montrer l'existence et l'unicité d'une solution au problème

$$(A) \qquad \theta'' + \epsilon\theta' + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0, \quad (\theta(0), \theta'(0)) = (\theta_0, \theta_1),$$

où $\epsilon > 0$. Quelle est la signification physique du terme $\epsilon\theta'$? Étudier le comportement des solutions quand $t \to \infty$.

Chapitre 4

Points d'équilibre d'un système différentiel

4.1 Points d'équilibre

Considérons le système différentiel dans $\mathbb{R}^n$

$$x'(t) = f(x(t)), \tag{4.1}$$

où $f \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$.

Un **point d'équilibre** de (4.1) est un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $f(x_0) = 0$. Le système linéarisé au point x_0 associé à (4.1) est le système linéaire

$$y'(t) = Df(x_0)y. \tag{4.2}$$

• Un point d'équilibre x_0 est dit **hyperbolique** lorsque toutes les valeurs propres de $Df(x_0)$ sont à partie réelle non nulle.

• Un point d'équilibre x_0 est une **source** lorsque toutes les valeurs propres de $Df(x_0)$ sont à partie réelle strictement positive.

• Un point d'équilibre x_0 est un **puits** lorsque toutes les valeurs propres de $Df(x_0)$ sont à partie réelle strictement négative.

Définition 4.1.1 *Un point d'équilibre x_0 de (4.1) est* **stable** *si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que*

$$\phi_t(\xi) \in B(x_0, \varepsilon) \quad \text{pour tout } \xi \in B(x_0, \delta), \text{et tout } t \geq 0,$$

où ϕ_t désigne le flot du système (4.1).

Un point d'équilibre x_0 de (4.1) est **asymptotiquement stable** *si*

(i) il est stable,

(ii) il existe $r > 0$ tel que pour tout $\xi \in B(x_0, r)$, $lim_{t\to\infty}\phi_t(\xi) = x_0$.

Rappelons le résultat suivant du chapitre précédent.

Théorème 4.1.1 *Soit $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Le point d'équilibre 0 du système linéaire $x' = Ax$ est stable si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont vérifiées* *(i)* $\quad Re\ \sigma(A) \leq 0$,

(ii) *pour tout* $\lambda \in \sigma(A)$ *telle que* $Re\ \lambda = 0$, λ *est semi-simple (i.e.* $Ker(A - \lambda I) = Ker(A - \lambda I)^{m(\lambda)}$*),* $m(\lambda)$ *étant la multiplicité algébrique de* λ*).*

Si $f \in C^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, le système (4.1) peut s'écrire

$$(x - x_0)' = Df(x_0)(x - x_0) + \int_0^1 (1 - \theta) D^2 f(x_0 + \theta(x - x_0))(x - x_0)^2\, d\theta.$$

Si $x_0 = 0$, on écrira $x' = Ax + g(x)$, avec $A = Df(0)$ et $g(x) = \int_0^1 (1 - \theta) D^2 f(\theta x) x^2\, d\theta$. Si de plus 0 est un point d'équilibre de (4.1), g vérifie $\lim_{x \to 0} g(x)/|x| = 0$. Après changement d'origine, l'étude d'un point d'équilibre revient donc à considérer des systèmes du type

$$x' = Ax + g(x), \qquad \text{avec } \lim_{x \to 0} g(x)/|x| = 0,$$

où g sera supposée localement Lipschitzienne sur $\mathbb{R}^n$.

4.2 Condition suffisante de stabilité

Théorème 4.2.1 *Soit* $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$*, et soit* g *une fonction à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$*, localement Lipschitzienne sur* $\mathbb{R}^n$*, telle que* $\lim_{x \to 0} g(x)/|x| = 0$*. Si* $Re\ \sigma(A) < 0$*, alors il existe* $r > 0$ *tel que, pour tout* $\xi \in B(0, r)$*, le système*

$$x' = Ax + g(x), \qquad x(0) = \xi, \tag{4.3}$$

admet une solution unique sur $\mathbb{R}^+$*, vérifiant*

$$|\phi_t(\xi)| \leq Ce^{-\beta t}|\xi| \quad \textit{pour tout } t \geq 0,$$

où ϕ_t *est le flot du système (4.3),* C *et* β *sont des constantes positives.*

Preuve. Du chapitre 3, on déduit

$$|e^{tA}\xi| \leq Ce^{-\mu t}|\xi| \quad \text{pour tout } t \geq 0,$$

où $C > 0$ et $0 < \mu < -Re\ \sigma(A)$.

Soit $0 < \epsilon < \mu$. De la condition $\lim_{x \to 0} g(x)/|x| = 0$, on déduit l'existence de $0 < \delta < \epsilon$ tel que

$$\frac{|g(x)|}{|x|} \leq \frac{\epsilon}{C} \quad \text{pour tout } |x| \leq \delta.$$

Montrons que $x(t) = \phi_t(\xi)$ vérifie $|x(t)| < \delta < \epsilon$, pour tout ξ tel que $|\xi| < \delta/C = r$, et tout $t > 0$. Rappelons que $x(t) = e^{tA}\xi + \int_0^t e^{(t-s)A} g(x(s))ds$. Si $|\xi| < \delta/C$, et si $|x(s)| \leq \delta$, alors on a :

$$|x(t)| \leq Ce^{-\mu t}\frac{\delta}{C} + \frac{\epsilon}{C}\int_0^t Ce^{-\mu(t-s)}|x(s)|ds = \delta e^{-\mu t} + \epsilon e^{-\mu t}\int_0^t e^{\mu s}|x(s)|ds.$$

En multipliant par $e^{\mu t}$, on obtient

$$e^{\mu t}|x(t)| \leq \delta + \epsilon \int_0^t e^{\mu s}|x(s)|ds.$$

Du lemme de Gronwall, on déduit $e^{\mu t}|x(t)| \leq \delta e^{\epsilon t}$, soit encore

$$|x(t)| \leq \delta e^{(-\mu+\epsilon)t} \quad \text{pour tout } t > 0. \tag{4.4}$$

Considérons la solution maximale définie sur $B(0,\delta)$. D'après le théorème d'existence d'une solution maximale unique (chapitre 1), soit la solution maximale est définie sur $\mathbb{R}^+$, soit elle existe sur un intervalle $[0, t^+[$, $t^+ < \infty$, et $\lim_{t\nearrow t^+}|x(t)| = \delta$. De (4.4), il découle

$$\lim_{t\nearrow t^+}|x(t)| \leq \delta e^{(-\mu+\epsilon)t^+} < \delta.$$

La solution est donc globale. En posant $\epsilon = \mu/2$, on obtient

$$|x(t)| \leq \delta e^{-\mu t/2} \quad \text{pour tout } |\xi| < \frac{\delta}{C} \text{ et tout } t \geq 0.$$

□

4.3 Condition suffisante d'instabilité

Commençons par énoncer un lemme utile dans la suite.

Lemme 4.3.1 *Soit $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que*

$$\alpha < Re\ \sigma(A) < \beta.$$

Alors, il existe une norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$, notée $\|\cdot\|_*$, associée au produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_*$, telle que

$$\alpha\|x\|_*^2 \leq \langle Ax, x\rangle_* \leq \beta\|x\|_*^2 \quad \textit{pour tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

Théorème 4.3.1 *(Condition suffisante d'instabilité d'un point d'équilibre) Soit g une fonction localement Lipschitzienne sur $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, telle que $\lim_{x\to 0} g(x)/|x| = 0$, et soit $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Si une des valeurs propres de A est à partie réelle strictement positive, alors* 0 *est un point d'équilibre instable du système*

$$x' = Ax + g(x). \tag{4.5}$$

Preuve. On peut décomposer $\mathbb{R}^n$ sous la forme $\mathbb{R}^n = E_+ \oplus E_-$, avec $AE_+ \subset E_+$, $AE_- \subset E_-$, les valeurs propres de $A_+ = \Pi_+ A = A\Pi_+$ sont à partie réelle positive (Π_+ désigne la projection sur E_+ parallèlement à E_-), et les valeurs propres de $A_- = \Pi_- A = A\Pi_-$ sont à partie réelle négative ou nulle (Π_- désigne la projection sur E_- parallèlement à E_+). Grâce au Lemme 4.3.1, il existe $a \in]0, Re\ \sigma(A)[$, et un produit scalaire sur E_+ , noté $\langle\cdot,\cdot\rangle_+$, tel que

$$\langle A_+x_+, x_+\rangle_+ \geq a\|x_+\|_+^2 \quad \text{pour tout } x_+ \in E_+.$$

($\|\cdot\|_+$ est la norme associée au p.s. $\langle\cdot,\cdot\rangle_+$.) De même, pour tout $0 < b < a$, on peut définir sur E_- un produit scalaire, noté $\langle\cdot,\cdot\rangle_-$, tel que

$$\langle A_-x_-, x_-\rangle_- \leq b\|x_-\|_-^2 \quad \text{pour tout } x_- \in E_-.$$

($\|\cdot\|_-$ est la norme associée au p.s. $\langle\cdot,\cdot\rangle_-$.) On définit le produit scalaire suivant sur $\mathbb{R}^n$

$$\langle x, y\rangle_* = \langle x_+ + x_-, y_+ + y_-\rangle_* = \langle x_+, y_+\rangle_+ + \langle x_-, y_-\rangle_-.$$

On note $\|\cdot\|_*$ la norme associée à ce produit scalaire. On définit le cône

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x_+\|_* \geq \|x_-\|_*\},$$

et on pose

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}(\|x_+\|_*^2 - \|x_-\|_*^2).$$

Remarquons que $C = \Phi^{-1}(\mathbb{R}^+)$ et que $\Phi^{-1}(0)$ est la frontière de C.

Soit $\epsilon = \frac{a-b}{4}$ fixé. Comme $\lim_{x\to 0} g(x)/|x| = 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\|g(x)\|_* \leq \|x\|_*$ pour tout $\|x\|_* \leq \delta$.

Soit $(x(t))_{t\in I}$ une solution de (4.5) telle que $\|x(0)\|_* < \delta$ et $\Phi(x(0)) > 0$. Posons $\varphi(t) = \Phi(x(t))$. Pour tout $t \geq 0$ tel que $\|x(t)\|_* \leq \delta$, nous avons

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= \langle \Pi_+ x(t), \Pi_+ x'(t)\rangle_+ - \langle \Pi_- x(t), \Pi_- x'(t)\rangle_- \\ &= \langle A_+ x_+(t), x_+(t)\rangle_+ - \langle A_- x_-(t), x_-(t)\rangle_- + \langle \Pi_+ x(t), \Pi_+ g(x(t))\rangle_+ - \langle \Pi_- x(t), \Pi_- g(x(t))\rangle_- \\ &\geq a\|x_+(t)\|_*^2 - b\|x_-(t)\|_*^2 - \epsilon(\|x_+(t)\|_* + \|x_-(t)\|_*)\|x(t)\|_*.\end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\varphi'(t) \geq a\|x_+(t)\|_*^2 - b\|x_-(t)\|_*^2 - \epsilon(\|x_+(t)\|_* + \|x_-(t)\|_*)\|x(t)\|_*. \tag{4.6}$$

Comme $\varphi(0) > 0$, pour $t > 0$ petit, on aura $\varphi(t) \geq 0$ et $\|x_-(t)\|_* \leq \|x_+(t)\|_*$, et par conséquent $\|x(t)\|_* \leq 2\|x_+(t)\|_*$. De (4.6), on déduit

$$\varphi'(t) \geq (a - 4\epsilon)\|x_+(t)\|_*^2 - b\|x_-(t)\|_*^2 = 2b\varphi(t), \tag{4.7}$$

pour tout $t \geq 0$ vérifiant $\|x(t)\|_* \leq \delta$ et $\varphi(t) \geq 0$. En intégrant (4.7), on obtient

$$\varphi(t) \geq \varphi(0)e^{2bt}, \tag{4.8}$$

pour tout t appartenant à l'intervalle des $t \geq 0$ vérifiant $\|x(t)\|_* \leq \delta$ et $\varphi(t) \geq 0$. On en déduit que $\varphi(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$ tel que $\|x(t)\|_* \leq \delta$. En d'autres termes, une trajectoire de (4.5), dont la valeur initiale appartient à $\{x \mid \|x\|_* < \delta, \Phi(x) > 0\}$, quitte la boule $\{x \mid \|x\|_* \leq \delta\}$ avant de quitter le cône C. De plus de (4.8), on déduit que toute solution de (4.5), dont la condition initiale appartient à $\{x \mid \|x\|_* < \delta, \Phi(x) > 0\}$ et est non nulle, atteint la frontière de la boule $\{x \mid \|x\|_* < \delta\}$. Le théorème est donc démontré. $\square$

Chapitre 5

Invariance et fonctions de Liapunov

5.1 Invariance

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f \in C^1(U;\mathbb{R}^n)$. Considérons le système $x' = f(x)$. Notons ϕ_t le flot associé à ce système.

Définition 5.1.1 *Un ensemble $M \subset U$ est dit positivement invariant pour le flot ϕ_t si $(\phi_t(M))_{t\geq 0} \subset M$. Un ensemble $M \subset U$ est dit négativement invariant pour le flot ϕ_t si $(\phi_t(M))_{t\leq 0} \subset M$. Un ensemble $M \subset U$ est dit globalement invariant (ou encore invariant) pour le flot ϕ_t si $(\phi_t(M))_{t\in\mathbb{R}} \subset M$.*

On démontrera à titre d'exercice les propriétés suivantes.
• Si M est positivement invariant alors $\overline{M}$ est aussi positivement invariant.
• Un ensemble fermé $M \subset U$ est positivement invariant si, et seulement si, pour tout $x \in \partial M$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(\phi_t(x))_{0\leq t\leq \varepsilon} \subset M$.

Théorème 5.1.1 *Soit Ψ une application de U dans $\mathbb{R}$, de classe C^1, telle que $\nabla\Psi(x) \neq 0$ pour tout $x \in \Psi^{-1}(0)$. Supposons que $M = \Psi^{-1}((-\infty, 0]) \subset U$. Alors M est positivement invariant si, et seulement si,*

$$(\nabla\Psi(x)|f(x)) \leq 0 \quad \textit{pour tout } x \in \partial M = \Psi^{-1}(0).$$

Preuve. Montrons que la condition est nécessaire. Supposons qu'il existe $x \in \Psi^{-1}(0)$ tel que $(\nabla\Psi(x)|f(x)) > 0$. Alors il existe un voisinage V_x de x tel que $(\nabla\Psi(y)|f(y)) > 0$ pour tout $y \in V_x$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\phi_t(x) \in V_x$ pour tout $t \in [0, \varepsilon]$. Pour tout $0 < t < \varepsilon$, on a $\Psi(\phi_t(x)) - \Psi(x) = \int_0^t (\nabla\Psi(\phi_s(x))|f(\phi_s(x)))ds > 0$. Donc $(\phi_t(x))_{0<t<\varepsilon} \in M^c$ et M n'est pas positivement invariant. Nous avons une contradiction, ce qui prouve que la condition est nécessaire.

Pour montrer la réciproque, on suppose que $\nabla\Psi$ est localement Lipschitz au voisinage de ∂M. Cette hypothèse n'est pas indispensable. Lorsque cette hypothèse n'est pas satisfaite il faut utiliser un théorème d'approximation locale d'une fonction continue par une fonction Lipschitz.

On veut montrer que, pour tout $x \in \partial M$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $(\phi_t(x))_{0\leq t\leq\varepsilon} \subset M$.

Soit $x \in \partial M$, on a $|\nabla\Psi(x)| \neq 0$. Il existe un voisinage V_x de x tel que $(\nabla\Psi(y)|f(y) - \lambda\nabla\Psi(y)) \leq 0$ et $|\nabla\Psi(y)| \geq \alpha > 0$ pour tout $y \in \partial M \cap V_x$. Pour tout $y \in \partial M \cap V_x$, on a $(\nabla\Psi(y)|f(y)-\lambda\nabla\Psi(y))\leq -\lambda\alpha^2$. Notons ϕ_t^λ le flot du champ $f-\lambda\nabla\Psi$. Soient $\varepsilon>0$ suffisamment petit et $\bar\lambda>0$ tels que $\phi_t^\lambda(x)\in V_x$ pour tout $t\in[0,\varepsilon]$ et tout $\lambda\in[0,\bar\lambda]$. Montrons que $\phi_t^\lambda(x)\in int(M)\cap V_x$ pour tout $t\in]0,\varepsilon]$ et tout $\lambda\in]0,\bar\lambda]$. Supposons qu'il existe $\hat t\in]0,\varepsilon]$ et tout $\hat\lambda\in]0,\bar\lambda]$ tels que $\phi_{\hat t}^{\hat\lambda}(x)\in\partial M\cap V_x$. Alors $\Psi(\phi_{\hat t}^{\hat\lambda}(x))-\Psi(x)=\int_{I_{\hat\lambda}}\nabla\Psi(\phi_s^{\hat\lambda}(x))\cdot(f-\lambda\nabla\Psi(\phi_s^{\hat\lambda}(x)))ds<0$, avec $I_{\hat\lambda}=\{t\in[0,\hat t]\mid \phi_t^{\hat\lambda}(x)\in\partial M\}$. On a une contradiction. Donc $\phi_t^\lambda(x)\in M\cap V_x$ pour tout $t\in[0,\varepsilon]$ et tout $\lambda\in]0,\bar\lambda]$. Du théorème de dépendance continue par rapport à λ on déduit que $\phi_t(x)\in M\cap V_x$ pour tout $t\in[0,\varepsilon]$. On a donc montré que M est positivement invariante pour le flot ϕ_t.

Théorème de dépendance continue par rapport à λ. Considérons le système (E_λ) $x'=f(x)+\lambda g(x)$, $x(0)=x_0$, avec g de classe C^1. Soit $\phi_t^\lambda(x_0)$ la solution de ce système et $\phi_t(x_0)$ la solution correspondant à $\lambda=0$. On note $V_0=B(x_0,r_0)\times B(0,\Lambda_0)$, $M=\max_{V_0}|f+\lambda g|$. Soit $0<T\leq r_0/M$, et soit k la constante de Lipschitz de f sur $B(x_0,r_0)$. Pour tout $\lambda\in B(0,\Lambda_0)$, $C=[-T,T]\times B(x_0,r_0)$ est un cylindre de sécurité pour (E_λ). On démontre que $|\phi_t(x_0)-\phi_t^\lambda(x_0)|\leq\lambda M\exp(|kt|)$.

Corollaire 5.1.1 *Soient Ψ_j, $j=1,...,k$, des applications de U dans $\mathbb{R}$, de classe C^1, telles que $\nabla\Psi_j(x)\neq 0$ pour tout $x\in\Psi_j^{-1}(0)$. Supposons que $M=\cap_{j=1}^k\Psi_j^{-1}((-\infty,0])\subset U$. Si*

$$(\nabla\Psi_j(x)|f(x))\leq 0 \quad \textit{pour tout } x\in M=\Psi_j^{-1}(0) \textit{ et tout } j=1,...,k,$$

alors M est positivement invariant.

Théorème 5.1.2 *(Version locale du théorème d'invariance) Soit Ψ une application de U dans $\mathbb{R}$, de classe C^1, telle que $\nabla\Psi(x_0)\neq 0$ avec $x_0\in U$. Soit V_{x_0} un voisinage ouvert de x_0 sur lequel $\nabla\Psi(x)\neq 0$, et posons $M=\Psi^{-1}((-\infty,0])\cap V_{x_0}$. Si*

$$(\nabla\Psi(x)|f(x))\leq 0 \quad \textit{pour tout } x\in\partial M\cap V_{x_0}=\Psi^{-1}(0)\cap V_{x_0},$$

alors il existe $\varepsilon>0$ tel que $\phi_t(x_0)\in M\cap V_{x_0}$ pour tout $t\in[0,\varepsilon]$.

La preuve est analogue à celle du théorème 5.1.1.

5.2 Fonctions de Liapunov

Les fonctions de Liapunov d'un système différentiel $x'=f(x)$ dans $\mathbb{R}^n$ sont utilisées pour étudier la stabilité des points d'équilibre et l'invariance de régions de $\mathbb{R}^n$. Illustrons le problème de stabilité par un exemple. Considérons le système de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} ax-y+kx(x^2+y^2) \\ x-ay+ky(x^2+y^2) \end{pmatrix}, \tag{5.1}$$

où a et k sont des constantes, $a>0$. Le point $(0,0)$ est un point d'équilibre du système. Les valeurs propres du système linéarisé en $(0,0)$ sont $\pm\sqrt{a^2-1}$. Si $a^2>1$, les deux valeurs propres sont de signes contraires. Dans ce cas $(0,0)$ est un point selle, il est instable. Si $a^2=1$, le système linéaire est dégénéré. Si $0<a^2<1$, $(0,0)$ est un centre pour le système linéaire. Dans ce cas les théorèmes de linéarisation du chapitre précédent ne permettent pas de conclure quant à la stabilité de $(0,0)$ pour le système non linéaire.

Soit V une fonction de classe C^1 de $U \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On appelle **dérivée orbitale de V en $x \in U$ pour le flot ϕ_t** la limite

$$\dot{V}(x) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big(V(\phi_t(x)) - V(x)\Big) = DV(x)\cdot f(x).$$

Nous allons utiliser cette notion pour étudier la stabilité de $(0,0)$ dans le cas $0 < a^2 < 1$. Posons $V(x,y) = x^2 - 2axy + y^2$. Si $0 < a < 1$, alors $V(x,y) \geq 0$ sur $\mathbb{R}^2$, et les courbes de niveau de V sont des ellipses. Calculons $\dot{V}$. Un calcul direct donne $\dot{V}(x,y) = 2k(x^2+y^2)(x^2+y^2-2axy)$. Remarquons que si $\dot{V}(x,y) < 0$, l'angle formé par $\nabla V(x,y)$ et le champ de vitesse $f(x,y)$ est supérieur à $\pi/2$, et la trajectoire du système pénètre dans le domaine $\{(x,y) \mid V(x,y) \leq c\}$. Ce cas correspond à $k < 0$. Cette remarque étant valable pour toute courbe de niveau $c > 0$, et $V(0,0)$ étant égal à zéro, on en déduit que $(0,0)$ est asymptotiquement stable si $k < 0$. On démontre de même que $(0,0)$ est instable si $k > 0$.

Définition 5.2.1 *Une fonction de Liapunov pour le système $x' = f(x)$ est une fonction $V \in C^1(U)$ telle que $\dot{V}(x) \leq 0$ pour tout $x \in U$.*

Théorème 5.2.1 *(Théorème de stabilité de Liapunov) Soit $\bar{x}$ un point d'équilibre du système $x' = f(x)$. Soit $\mathcal{O} \subset U$, et soit V une fonction de $C(\mathcal{O}) \cap C^1(\mathcal{O} \setminus \{\bar{x}\})$ telle que :*
(a) $V(\bar{x}) = 0$ et $V(x) > 0$ si $x \neq \bar{x}$
(b) $\dot{V}(x) \leq 0$ pour tout $x \in \mathcal{O} \setminus \{\bar{x}\}$.
Alors $\bar{x}$ est stable. Si de plus
(c) $\dot{V}(x) < 0$ pour tout $x \in \mathcal{O} \setminus \{\bar{x}\}$,
alors $\bar{x}$ est asymptotiquement stable.

Remarque. La condition (b) correspond à la définition d'une fonction de Liapunov sur $\mathcal{O}\setminus\{\bar{x}\}$. Certains ouvrages définissent les fonctions de Liapunov sur $\mathcal{O} \setminus \{\bar{x}\}$, comme les fonctions vérifiant (a) et (b). Les fonctions qui vérifient (c) sont parfois appelées fonctions de Liapunov strictes.

Preuve. Soit $\delta > 0$ tel que $\bar{B}(\bar{x},\delta) \subset \mathcal{O}$. Notons $k > 0$ le minimum de V sur la frontière de $\bar{B}(\bar{x},\delta)$. Soit $\mathcal{O}_k = \{x \in B(\bar{x},\delta) \mid V(x) < k\}$. Remarquons que $\mathcal{O}_k$ est un voisinage ouvert de $\bar{x}$. Pour toute solution de $x' = f(x)$ telle que $x(0) \in \mathcal{O}_k$, on a $x(t) \in \mathcal{O}_k$ pour tout $t > 0$ (c'est une conséquence de (b)). Par conséquent $\bar{x}$ est stable.

Supposons que (c) est vérifé. Soit x_0 un point quelconque de $B(\bar{x},r) \subset \mathcal{O}_k$ ($\mathcal{O}_k$ est un voisinage de $\bar{x}$ donc un tel $r > 0$ existe). La fonction $t \mapsto V(\phi_t(x_0))$ est décroissante et bornée inférieurement par 0. Soit L la limite de $V(\phi_t(x_0))$ quand t tend vers l'infini. Si $L = 0$, la preuve est terminée. Sinon on a $\dot{V}(\phi_t(x_0)) \leq -c < 0$ pour tout $t \geq 0$, et on obtient une contradiction. $\square$

Théorème 5.2.2 *Supposons que $V \in C(\mathcal{O}) \cap C^1(\mathcal{O} \setminus \{\bar{x}\})$ vérifie les conditions (a) et (b) du théorème de stabilité de Liapunov. S'il existe un voisinage compact $\overline{\Omega} \subset \mathcal{O}$ de $\bar{x}$ tel que $\overline{\Omega}$ soit positivement invariant, et $\overline{\Omega} \setminus \{\bar{x}\}$ ne contient aucune orbite $(\phi_t(x))_{t\in\mathbb{R}}$ sur laquelle V est constante, alors $\bar{x}$ est asymptotiquement stable et $\overline{\Omega}$ est contenu dans le domaine d'attraction de $\bar{x}$.*

Preuve. Raisonnons par l'absurde. Soit $(\phi_t(x_0))_{t\geq 0}$ une orbite contenue dans $\overline{\Omega}$ telle que $\phi_t(x_0)$ ne converge pas vers $\bar{x}$ quand t tend vers l'infini. Il existe une suite $(t_n)_n$ tendant vers l'infini, et $a \neq \bar{x}$, $a \in \overline{\Omega}$, tels que $\lim_n \phi_{t_n}(x_0) = a$.

Montrons que la trajectoire $\phi_t(a)$ existe pour $t \in \mathbb{R}$. L'ensemble $\overline{\Omega}$ étant positivement invariant, $\phi_t(a)$ existe pour $t \geq 0$. De plus, $\phi_t(\phi_{t_n}(x_0))$ existe pour tout $t \in [-t_n, 0)$. Comme $\lim_n \phi_{t_n}(x_0) = a$, on en déduit $\phi_t(a)$ est défini sur $[-t_n, 0)$. En effet $a \in \overline{\Omega}$, et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N(\varepsilon)$ tel que $|a - \phi_{t_n}(x_0)| < \varepsilon$ pour $n \geq N(\varepsilon)$. Donc $\phi_t(a) = \phi_t(\phi_{t_n}(x_0) + a - \phi_{t_n}(x_0))$ est bien défini si $n > N(\varepsilon)$ si $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit. Étant donné que $-t_n \to -\infty$, $\phi_t(a)$ est défini pour tout $t \leq 0$.

Soit $L = \{b \in \overline{\Omega} \mid \text{il existe une suite } (t_n)_n \text{ tendant vers l'infini telle que } \lim_n \phi_{t_n}(x_0) = b\}$. On a $\alpha = V(a) = \inf\{V(\phi_t(x_0)) \mid t \geq 0\}$. Donc tous les points de L sont tels que $V(b) = \alpha$. Montrons que $\phi_s(a) \in L$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. On a $\lim_n \phi_{t_n+s}(x_0) = \phi_s(a)$, car $\phi_{t_n+s}(x_0) = \phi_s(\phi_{t_n}(x_0))$ et $\lim_n \phi_s(\phi_{t_n}(x_0)) = \phi_s(a)$. On en déduit que V est constante sur $(\phi_t(a))_{t\in\mathbb{R}}$, ce qui est en contradiction avec une des hypothèses. Le théorème est donc démontré.

Théorème 5.2.3 *(Théorème d'instabilité) Soit $\bar{x}$ un point d'équilibre du système $x' = f(x)$. Soit $\mathcal{O} \subset U$ un voisinage de $\bar{x}$, et soit $V \in C^1(\mathcal{O})$. Supposons que*

(a) $V(\bar{x}) = 0$ et dans tout voisinage de $\bar{x}$ il existe des points où V est strictement positive,

(b) $\dot{V}(x) > 0$ pour tout $x \in \mathcal{O}$.

Alors $\bar{x}$ est instable.

Preuve. Soit $r > 0$ tel que $B(\bar{x}, r) \subset \mathcal{O}$. Grâce à (a), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_0 \in B(\bar{x}, \varepsilon)$ tel que $V(x_0) > 0$. Comme $\dot{V} > 0$ sur $B(\bar{x}, \varepsilon)$, $V(\phi_t(x_0)) \geq V(x_0)$ pour tout $t \geq 0$ et $\dot{V}$ est borné inférieurement par une constante $K > 0$. On a donc $V(\phi_t(x_0)) \geq V(x_0) + Kt$. On en déduit que $\phi_t(x_0) \notin B(\bar{x}, r)$ pour t assez grand (en effet si ce n'était pas le cas on aurait $\max_{B(\bar{x},r)} V \geq V(\phi_t(x_0)) \geq V(x_0) + Kt$ pour tout $t \geq 0$, ce qui est absurde). On a bien montré que $\bar{x}$ est instable.

5.3 Exercices

Exercice 1. (*Existence d'ondes progressives pour l'équation de Fisher*) L'équation aux dérivées partielles

$$(E) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1-u), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R},$$

a été utilisée pour modéliser l'interaction entre des phénomènes de croissance et de dispersion. Une solution de cette équation aux dérivées partielles est appelée onde progressive de vitesse $c > 0$, de type front d'onde, s'il existe une fonction $v : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ telle que $u(x,t) = v(x-ct)$, $v(-\infty) = 1$, $v(\infty) = 0$, et $0 \leq v(\xi) \leq 1$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.
1 - On considère le système différentiel

$$(S) \qquad v' = w, \quad w' = -cw - f(v),$$

avec $f(v) = v(1-v)$. Déterminer les points d'équilibre de ce système, leur nature. On suppose maintenant que $c > 2$. On pose $E(v,w) = \frac{w^2}{2} + \frac{v^2}{2} - \frac{v^3}{3}$. On note $D = \{(v,w) \mid \frac{-1}{2} \leq v \leq 1,\ E(v,w) \leq \frac{1}{6}\}$. Soit $(\bar{v}, \bar{w})$ la trajectoire de (S) telle que $(\bar{v}, \bar{w})(-\infty) = (0,1)$, $\bar{v}(t) \leq 1$ et $(\bar{v}, \bar{w})(t)$ appartient à la variété instable passant par $(0,1)$ pour t au voisinage de $-\infty$. Calculer $\frac{d}{dt}E(\bar{v}(t), \bar{w}(t))$. En déduire que $(\bar{v}(t), \bar{w}(t)) \in D$, puis que $(\bar{v}(t), \bar{w}(t)) \in D \cap \{v \geq 0\} \cap \{w \leq 0\}$. Montrer que $\lim_{t\to\infty}(\bar{v}(t), \bar{w}(t)) = (0,0)$.

2 - Montrer que $u(x,t) = v(x-ct)$ est une onde progressive de type front d'onde si, et seulement si, $(v(t), v'(t))_{t\in\mathbb{R}}$ est une orbite de (S) reliant les points $(1,0)$ et $(0,0)$.

3 - Montrer que si $c > 2$, il existe une et une seule onde progressive de type front d'onde de vitesse c.

Exercice 2. On considère le système différentiel

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x+2-y \\ x^2-y \end{pmatrix}. \tag{5.2}$$

1 - Déterminer les isoclines des pentes nulles, et des pentes verticales. Déterminer les points d'équilibre de ce système et leur nature.

2 - Vérifier que le champ de vitesse du système (5.2) est à divergence nulle. Montrer que s'il existe une fonction $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ telle que $F'_y(x,y) = x+2-y$ et $F'_x(x,y) = -x^2+y$, alors F est une intégrale première du système (5.2). Déterminer une telle fonction F.

3 - Montrer qu'il existe une solution unique X du système (5.2), non constante, telle que $X(-\infty) = (-1,-1)$ et $X(\infty) = (-1,-1)$.

4 - Montrer qu'il existe une solution unique $X = (x,y)$ de (5.2) telle que $X(-\infty) = (-1,-1)$ et $\lim_{t\to\infty}(x(t), y(t)) = (-\infty, \infty)$. Montrer qu'il existe une solution unique $X = (x,y)$ de (5.2) telle que $X(\infty) = (-1,-1)$ et $\lim_{t\to-\infty}(x(t), y(t)) = (-\infty, -\infty)$.

5 - Déterminer les solutions périodiques de (5.2), et l'allure des trajectoires dans le plan de phase.

Exercice 3. Une extension du système de Lotka-Volterra est obtenue en prenant en compte les effets de saturation dûs à un nombre important de proies. Un modèle plus réaliste que le système de Lotka-Volterra est

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = F(u,v) = \begin{pmatrix} u(1-u) - \frac{auv}{u+d} \\ bv - \frac{bv^2}{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(u,v) \\ g(u,v) \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

les paramètres a, b, et d sont positifs. On ne s'intéresse qu'aux solutions positives où nulles. Montrer que le sytème (5.3) a deux points d'équilibre $(0,0)$ et $(\bar{u},\bar{v})$ dans $\mathbb{R}^2_+$. Vérifier que

$$A \;=\; DF(\bar{u},\bar{v}) = \begin{pmatrix} \bar{u}\left(\frac{a\bar{u}}{(\bar{u}+d)^2}-1\right) & -\frac{a\bar{u}}{\bar{u}+d} \\ b & -b \end{pmatrix}. \tag{5.4}$$

Montrer que $\det A > 0$. Quelle condition doit vérifier $\mathrm{trace}(Df(\bar{u},\bar{v}))$ pour que $(\bar{u},\bar{v})$ soit stable ? En déduire que $(\bar{u},\bar{v})$ est stable si, et seulement si,

$$b > \left(a - [(1-a-d)^2+4d]^{1/2}\right)\left(1+a+d-[(1-a-d)^2+4d]^{1/2}\right)/2a.$$

Vérifier que si $0 < a < \frac{1}{2}$, $b > 0$, et $d > 0$, alors $(\bar{u},\bar{v})$ est un point d'équilibre stable.
On pose maintenant $a = 1-\frac{1}{16}$, $d = \frac{1}{16}$, et $b < \frac{7}{20}$. Montrer que, dans ce cas, $(\bar{u},\bar{v})$ est instable.

Soit (u,v) est une solution de (5.3). Montrer qu'il existe $c > 1$ tel que $\frac{|v'(t)|}{|u'(t)|} > c$ en tout point vérifiant $v(t) \leq 1$, $v(t) = cu(t)$, et $f(u(t),v(t)) \leq 0$. (Montrer en particulier que $c > \frac{a+db}{db}$ convient.) Pour $\varepsilon > 0$, on pose $\theta = \frac{1}{a}(1+d-\varepsilon)\varepsilon$, et $c = \frac{1}{a}(d-\theta)\frac{1-\theta}{\theta}$. Vérifier que pour ε assez petit, alors $c > \frac{a+db}{db}$. On suppose maintenant que cette condition est vérifiée. On pose $A = (1-\varepsilon,\theta)$, $B = (1-\varepsilon,1-\varepsilon)$, $C = (\frac{1-\varepsilon}{c},1-\varepsilon)$, $D = (\theta,c\theta)$, $E = (\theta,\theta)$. Montrer que la région délimitée par le pentagone (A,B,C,D,E) est positivement invariante. (On vérifiera que $f(1-\varepsilon,\theta) = 0$.) Montrer l'existence d'une solution périodique.

Exercice 4. (*La réaction de Belousov-Zhabotinski*) Le système suivant

$$(FN) \qquad \begin{pmatrix} \varepsilon x \\ \delta y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} qy - xy + x(1-x) \\ 2fz - qy - xy \\ x - z \end{pmatrix}.$$

étudié par Field et Noyes, est un modèle mathématique pour la description de phénomènes d'oscillations en chimie (réaction de Belousov-Zhabotinski). Les paramètres f, δ, q et ε sont des constantes positives, avec $\varepsilon << 1$ et $q < 1$. Les variables x, y, et z sont des concentrations chimiques (x est la concentration normalisée de $HBrO_2$, y est la concentration normalisée de Br^-, et z celle de Ce^{4+}). On ne s'intéressera donc qu'aux solutions positives ou nulles du système (FN).

1 - Montrer que le système (FN) a $(0,0,0)$, et un autre point critique (x_s,y_s,z_s) dans l'orthant $\mathbb{R}^3_+$. Montrer que le point $(0,0,0)$ est instable ?

2 - Montrer que le domaine $D = \{(x,y,z) \mid q \leq x \leq 1,\ \frac{2fq}{q+1} \leq y \leq \frac{f}{q},\ q \leq z \leq 1\}$ est positivement invariant. Que peut-on dire de l'ensemble ω-limite des trajectoires rencontrant D ?

3 - Montrer que si $f = 0.45$, $\delta = 1/3$, $q = 0.1$, et $\varepsilon = 0.01$, alors (x_s,y_s,z_s) est instable (on pourra appliquer le critère de Routh-Hurwitz). Peut-on en déduire l'existence de solutions périodiques ?

Exercice 5. Les équations de Lorenz sont

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \sigma(y-x) \\ \rho x - y - xz \\ -\beta z + xy \end{pmatrix}.$$

Les paramètres σ, ρ, et β sont positifs.
1 - On pose $f(x,y,z) = \rho x^2 + \sigma y^2 + \sigma(z-2\rho)^2$. Montrer que, pour tout $a > 0$, l'ensemble $D_a = \{(x,y,z) \mid f(x,y,z) \leq a\}$ est borné.
2 - Soit $(x(t), y(t), z(t))_{t\in\mathbb{R}}$ une solution du système de Lorenz. Calculer la dérivée de $t \mapsto f(x(t), y(t), z(t))$. On note E l'ellipsoïde d'équation $\rho x^2 + y^2 + \beta(z-\rho)^2 = \beta\rho^2$. Montrer que si a est assez grand alors $D_a \supset E$. (On vérifiera en particulier que $a > \max(\sigma(\beta+1)\rho^2, (\beta+\sigma)\rho^2, 4\sigma\rho^2)$ convient.) Montrer que si $\frac{d}{dt}f(x(t), y(t), z(t)) < 0$, alors $(x(t), y(t), z(t)) \notin E$. En déduire que si $a > \max(\sigma(\beta+1)\rho^2, (\beta+\sigma)\rho^2, 4\sigma\rho^2)$, alors toute trajectoire qui pénètre dans D_a ne quitte jamais cette région.

Chapitre 6

Théorème de Poincaré-Bendixson

6.1 Ensembles limites

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f \in C^1(U;\mathbb{R}^n)$. Considérons le système $x' = f(x)$. Notons ϕ_t le flot associé à ce système.

Définition 6.1.1 *Un point $\bar{x}$ est dit point ω-limite de la trajectoire $(\phi_t(x_0))_{t\in\mathbb{R}^+}$, s'il existe une suite $(t_n)_n$ convergeant vers ∞ telle que $lim_{n\to\infty}\phi_{t_n}(x_0) = \bar{x}$.*
Un point $\bar{x}$ est dit point α-limite de la trajectoire $(\phi_t(x_0))_{t\in\mathbb{R}^-}$, s'il existe une suite $(t_n)_n$ convergeant vers $-\infty$ telle que $lim_{n\to\infty}\phi_{t_n}(x_0) = \bar{x}$.
L'ensemble des points ω-limites (resp. α-limites) d'une trajectoire Γ est noté $\omega(\Gamma)$ (resp. $\alpha(\Gamma)$).

L'ensemble $\omega(\Gamma)\cup\alpha(\Gamma)$ est appelé ensemble limite.

Théorème 6.1.1 *Les ensembles α-limites et ω-limites d'une trajectoire Γ du système $x' = f(x)$ sont des fermés de $\mathbb{R}^n$. Si Γ est contenu dans un compact de $\mathbb{R}^n$, alors les ensembles $\omega(\Gamma)$ et $\alpha(\Gamma)$ sont non vides, connexes et compacts.*

Preuve. Soit $\Gamma = (\phi_t(x_0))_{t\in\mathbb{R}}$ une trajectoire du système $x' = f(x)$. Montrons que $\omega(\Gamma)$ est fermé. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de points de $\omega(\Gamma)$, convergeant vers $\bar{x}$ dans $\mathbb{R}^n$. Montrons que $\bar{x} \in \omega(\Gamma)$. Comme $x_n \in \omega(\Gamma)$, il existe des suites $t_k^{(n)} \to \infty$ quand $k \to \infty$ telles que $\lim_{k\to\infty}\phi_{t_k^{(n)}}(x_0) = x_n$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $t_k^{(n+1)} > t_k^{(n)}$. De $\lim_{k\to\infty}\phi_{t_k^{(n)}}(x_0) = x_n$, on déduit qu'il existe $K(n)$ tel que $|\phi_{t_k^{(n)}}(x_0) - x_n| < \frac{1}{n}$ pour tout $k \geq K(n)$. Ici encore, sans perte de généralité on supposera que $K(n) > K(n-1)$. Posons $\tau_n = t_{K(n)}^{(n)}$. On a

$$|\phi_{\tau_n}(x_0) - \bar{x}| \leq |\phi_{\tau_n}(x_0) - x_n| + |x_n - \bar{x}| \leq \frac{1}{n} + |x_n - \bar{x}|.$$

On en déduit $\lim_{n\to\infty}|\phi_{\tau_n}(x_0) - \bar{x}| = 0$. De plus $\lim_{n\to\infty}\tau_n = \infty$. Donc $\bar{x} \in \omega(\Gamma)$.
Si Γ est contenu dans un compact K, si $\lim_{n\to\infty}t_n = \infty$, et si $\lim_{n\to\infty}\phi_{t_n}(x_0) = \bar{x}$, alors $\bar{x} \in K$. Par conséquent $\omega(\Gamma)$ est inclus dans K, et $\omega(\Gamma)$ est compact (car il est fermé et contenu dans un compact). De plus, $\omega(\Gamma)$ est non vide car la suite $(\phi_n(x_0))_n \subset K$ contient un point d'adhérence $\tilde{x}$. Par définition de $\omega(\Gamma)$, $\tilde{x}$ appartient à $\omega(\Gamma)$.

Montrons que $\omega(\Gamma)$ est connexe. Raisonnons par l'absurde. Soit A et B deux ensembles fermés disjoints tels que $\omega(\Gamma) = A \cup B$. Notons $\delta = d(A, B) = \min_{x \in A, y \in B} |x - y| > 0$. Il existe donc une suite $(t_n)_n$ telle que $d(\phi_{t_n}(x_0), A) < \frac{\delta}{2}$. Il existe également une suite $(s_n)_n$ telle que $d(\phi_{s_n}(x_0), B) < \frac{\delta}{2}$. L'application $t \mapsto d(\phi_t(x_0), A)$ étant continue, on déduit qu'il existe une suite $(\tau_n)_n$ telle que $d(\phi_{\tau_n}(x_0), A) = \frac{\delta}{2}$. On a alors l'existence d'une sous-suite, toujours indexée par n pour simplifier, telle que $\lim_{n \to \infty} \phi_{\tau_n}(x_0) = \bar{x}$. De plus on a $\lim_{n \to \infty} d(\phi_{\tau_n}(x_0), A) = \frac{\delta}{2}$. Donc $\bar{x}$ n'appartient pas à A et $d(\bar{x}, B) \geq d(A, B) - d(\bar{x}, A) = \frac{\delta}{2}$. Donc $\bar{x}$ n'appartient pas à B et on a une contradiction.

6.2 Sections locales et boîtes de flots

Pour simplifier la rédaction de la suite nous supposons que $n = 2$, mais l'adaptation au cas $n \geq 2$ est immédiate.

Soit a un point de U tel que $f(a) \neq 0$. Une **section locale** de f en a est un segment S_a, ouvert dans la droite $a + H$ qu'il engendre, contenant a, transverse à f, i.e. tel que $f(x) \notin H$ pour tout $x \in S_a$.

Soit ψ_t le flot $\psi_t(x) = \psi_t(x_1, x_2) = (x_1 + t, x_2)$. Le flot ψ_t est donc le flot du système $x' = k(x)$, où $k(x) = (1, 0)^T$. Soit a un point de U tel que $f(a) \neq 0$. Une **boîte de flot** ('*flow box*' en anglais) du système $x' = f(x)$ en a est un couple $(\mathcal{O}, h)$, où $\mathcal{O}$ est un voisinage de a et h est un difféomorphisme de $\mathcal{O}$ sur $h(\mathcal{O})$ tel que $\psi_t = h(\phi_t)$. On vérifie aisément que cette condition est équivalente à $k \circ h(x) = Dh(x) \cdot f(x)$ pour tout $x \in \mathcal{O}$.

Théorème 6.2.1 *(Théorème de redressement) Soit a un point de U tel que $f(a) \neq 0$, et soit S_a une section locale de f en a. Alors il existe un voisinage ouvert $V_a \subset U$ de a, un voisinage ouvert W_0 de $0 \in R^2$, et un difféomorphisme h de classe C^1 de V_a sur W_0 tel que $k \circ h(x) = Dh(x) \cdot f(x)$ pour tout $x \in V_a$. Le couple (V_a, h) est donc une boîte de flot de f en a.*

Preuve. Par translation, on peut se ramener au cas où $a = 0$. Par rotation on peut se ramener au cas où $f(0) = \alpha\ e_1$ ((e_1, e_2) est la base canonique de $\mathbb{R}^n$), et par homothétie au cas où $f(0) = e_1$. Supposons donc que $a = 0$ et $f(0) = e_1$. Nous recherchons $g = h^{-1}$ tel que $g(x + te_1) = \phi_t(x)$. Posons $g(x) = \phi_{x_1}(0, x_2)$. Par définition de g on a $g(x + te_1) = \phi_{x_1+t}(0, x_2) = \phi_t(\phi_{x_1}(0, x_2)) = \phi_t(x)$. Il nous suffit donc de montrer que g est un difféomorphisme. Calculons $Dg(0)$. On a $\frac{\partial g}{\partial x_1}(0) = f(0) = e_1$, et $\frac{\partial g}{\partial x_2}(0) = e_2$ (d'après le théorème de dépendance des solutions d'un système différentiel par rapport aux conditions initiales). Étant donné que $Dg(0)$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^2$, du théorème d'inversion locale, on déduit que g est un difféomorphisme de classe C^1 d'un voisinage ouvert W_0 de $0 \in R^2$ sur l'ouvert $V_a = g(W_0)$ qui contient a.

Remarque. Si S_a est une section locale de f en a, on peut toujours choisir le voisinage W_0 de la forme $(-\sigma, \sigma) \times (S_a - a)$.

Lemme de Jordan. Si $\mathcal{C}$ est une courbe du plan, continue, fermée, et sans point double alors $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$ a deux composantes connexes, l'une appelée intérieur de $\mathcal{C}$, l'autre extérieur de $\mathcal{C}$.

Lemme 6.2.1 *(Lemme de monotonie) Soit Σ est une section locale d'un système dynamique plan $x' = f(x)$, avec f de classe C^1 sur un ouvert U, et soit $(x(t))_{t\in I}$ une solution de ce système. Si $A_i = x(t_i) \in \Sigma$ pour $i = 1, ..., 3$, et si $t_1 < t_2 < t_3$, alors $A_2 \in [A_1, A_3]$.*

Preuve. Soit Γ_{12} l'arc de courbe $(\phi_{t-t_1}(A_1))_{t_1\leq t\leq t_2}$, et notons T le segment $[A_1, A_2]$ (T est contenu dans Σ). Notons D la région fermée du plan de frontière $\Gamma_{12} \cup T$. Cette courbe est continue. On peut donc appliquer le lemme de Jordan. Au point A_2 le champ de vitesse est transverse à T, et donc on a deux possibilités : soit la trajectoire quitte D, soit elle pénètre dans D. Supposons qu'elle quitte D. Sur $[A_1, A_2]$ le flot quitte également D, sinon il existerait un point de $[A_1, A_2]$ où le champ serait nul. On en déduit que $\mathbb{R}^2 \setminus D$ est positivement invariante. On a donc $A_3 \in \mathbb{R}^2 \setminus D$. Comme $A_3 \in \Sigma$, on a $A_2 \in [A_1, A_3]$.

La preuve du Théorème de Poincaré-Bendixson repose sur les lemmes énoncés ci-dessous. Dans ces lemmes nous supposons que les hypothèses du théorème de Poincaré-Bendixson sont satisfaites.

Lemme 6.2.2 *Si S_b est une section locale de f en un point b, alors $\omega(x)\cap S_b$ contient au plus un point.*

Preuve. Raisonons par l'absurde. Soient a_1 et a_2 deux points distincts de $\omega(x) \cap S_b$. Soit (V_{a_i}, h_i) une boîte de flot de f en a_i, pour $i = 1, 2$. On supposera que V_{a_1} et V_{a_2} sont disjoints. Comme $a_i \in \omega(x)$ pour $i = 1, 2$, il existe une suite strictement croissante $(t_n)_n$, tendant vers l'infini, telle que $\phi_{t_{2n+1}}(x) \in V_{a_1}$ et $\phi_{t_{2n}}(x) \in V_{a_2}$. Du théorème de redressement, on déduit qu'il existe une suite strictement croissante $(s_n)_n$, tendant vers l'infini, telle que $\phi_{s_{2n+1}}(x) \in V_{a_1}\cap S_b$ et $\phi_{s_{2n}}(x) \in V_{a_2} \cap S_b$. Les voisinages V_{a_1} et V_{a_2} étant disjoints, on a une contradiction avec le lemme de monotonie.

Lemme 6.2.3 *Si $\omega(x)$ contient une orbite périodique Γ, alors $\omega(x) = \Gamma$.*

Preuve. Soient a un point de $\Gamma \subset \omega(x)$ et S_a une section locale du champ f en a telle que $S_a\cap\Gamma = \{a\}$. Il existe une boîte de flot (V_a, h) de f en a et une suite $(t_n)_n$ strictement croissante telle que $\phi_{t_n}(x) \in S_a$, $\phi_{t_n}(x) \to a$ quand $n \to \infty$, et $\phi_t(x) \notin S_a$ pour tout $t_{n-1} < t < t_n$ et tout $n \geq 1$ (la construction de la suite $(t_n)_n$ fait appel au Théorème de redressement). D'après le lemme de monotonie, la suite $(x_n)_n = (\phi_{t_n}(x))_n$ converge monotonement vers a dans S_a. Soit $T > 0$ la plus petite période telle que $\phi_T(a) = a$. Pour n suffisamment grand on a $\phi_T(x_n) \in V_a$ (en effet $|\phi_T(x_n)-a| = |\phi_T(x_n)-\phi(a)| \leq C|x_n-a|$). Il existe donc $\varepsilon > 0$ et $t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ tels que $\phi_{T+t_n+t}(x) = \phi_{T+t}(x_n) \in S_a$. Cela signifie que $T + t_n + t = t_{n+1}$. On a donc $t_{n+1} - t_n \leq T + \varepsilon$. Du théorème de dépendance continue par rapport aux conditions initiales on déduit que pour tout $\xi > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $|z - y| < \delta$ et $|t| \leq T + \varepsilon$, alors $|\phi_t(z) - \phi_t(y)| < \delta$. Il existe $N_0 > 0$, tel que $|x_n - a| < \delta$ pour tout $n \geq N_0$. Finalement, pour tout $t \in [t_n, t_{n+1}]$, on a $d(\phi_t(x), \Gamma) \leq |\phi_t(x) - \phi_{t-t_n}(a)| = |\phi_{t-t_n}(x_n) - \phi_{t-t_n}(a)| < \xi$. Cela permet de montrer que tout point d'accumulation de l'orbite positive de x appartient à Γ. On a donc montré que $\omega(x) \subset \Gamma$.

Lemme 6.2.4 *Si $\omega(x)$ contient ne contient pas de point d'équilibre, alors $\omega(x)$ contient une orbite périodique.*

Preuve. Nous savons que $\omega(x)$ est non vide et compact. Soit $a \in \omega(x)$. Comme $\omega(x)$ est invariant par ϕ_t, $\omega(a)$ est un sous-ensemble non vide de $\omega(x)$. Soit $b \in \omega(a)$. Étant donné que $\omega(x)$ ne contient pas de point d'équilibre, $f(b) \neq 0$. Soit (S_b, V_b) une section locale et une boîte de flot de f en b. Comme $b \in \omega(a)$, il existe une suite $t_n \to \infty$ quand $n \to \infty$ telle que $\phi_{t_n}(a) \in V_b$. Le théorème de redressement implique qu'il existe une suite $s_n \to \infty$ telle que $\phi_{s_n}(a) \in S_b \cap V_b$. D'après le lemme 6.2.2 $\phi_{s_n}(a)$ ne dépend pas de n. On a donc $\phi_{s_n}(a) = \phi_{s_{n+1}}(a)$, avec $s_n \neq s_{n+1}$. L'orbite de a est donc périodique.

6.3 Théorème de Poincaré-Bendixson

Soit $x' = f(x)$ un système différentiel sur un ouvert U du plan $\mathbb{R}^2$. Soit $x \in U$ tel que la trajectoire $(\phi_t(x))_{t\geq 0}$ soit contenu dans un compact de U. Si $\omega(x)$ ne contient pas de point d'équilibre, alors $\omega(x)$ est une orbite périodique du système différentiel.

6.4 Exercices

Exercice 1. Étudier les systèmes différentiels suivants

$$(1) \qquad x' = y + (1 - x^2 - y^2)x, \quad y' = -x + (1 - x^2 - y^2)y,$$

$$(2) \qquad x' = -y + (1 - x^2 - y^2)(4 - x^2 - y^2)x, \quad y' = x + (1 - x^2 - y^2)(4 - x^2 - y^2)y.$$

Étudier en particulier l'existence de solutions périodiques.

Exercice 2. On pose $E(x, y) = y^2 - 2x^2 + x^4$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère le système différentiel

$$(S) \qquad x' = \frac{\partial E}{\partial y} + \lambda E \frac{\partial E}{\partial x}, \quad y' = -\frac{\partial E}{\partial x} + \lambda E \frac{\partial E}{\partial y}.$$

1 - Étudier le système pour $\lambda = 0$.

2 - On suppose que $\lambda < 0$. Déterminer les ensembles ω-limites pour les conditions initiales $(1/2, 0)$, $(-1/2, 0)$, $(1, 2)$.

Exercice 3. (Critère de Bendixson) Soit F une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, de classe C^1. Montrer que, si le système différentiel $x' = F(x)$ a une solution périodique contenue dans un domaine D simplement connexe, alors $\mathrm{div} F$ change de signe dans D.

Exercice 4. Montrer que le système $x' = 1 - xy$, $y' = x$ n'admet pas de solution périodique. On pourra utiliser le critère de Bendixson.

Exercice 5. Montrer que l'origine est asymptotiquement stable pour l'équation $x'' + x'^3 + x^3 = 0$. On recherchera une fonction de Liapunov de la forme $V(x, y) = ax^4 + 2y^2$.

Exercice 6. Montrer que l'origine est instable pour le système $x' = y^2 - x^2$, $y' = 2xy$. On utilisera la fonction de Liapunov $V(x, y) = 3xy^2 - x^3$.

Chapitre 7

Variété stable et variété instable

7.1 Théorème de la variété stable

Soient $f \in C^1(U; \mathbb{R}^n)$ et $\bar{x}$ un point d'équilibre hyperbolique du système $x' = f(x)$. Notons ϕ_t le flot associé à ce système. Pour un voisinage donné V de $\bar{x}$, posons

$$W_s(V) = \{x \in V \mid \lim_{t\to\infty}\phi_t(x) = \bar{x}\}, \qquad W_i(V) = \{x \in V \mid \lim_{t\to-\infty}\phi_t(x) = \bar{x}\}.$$

Posons $A = Df(\bar{x})$, notons E_s le sous-espace stable du système linéaire $x' = Ax$, et E_i le sous-espace instable. Soit π_s la projection sur E_s parallèlement à E_i, et soit π_i la projection sur E_i parallèlement à E_s. Posons $A_s = \pi_s A = A\pi_s$, et $A_i = \pi_i A = A\pi_i$.

Théorème 7.1.1 *(Théorème de la variété stable) Il existe un voisinage V de $\bar{x}$, $r > 0$, et une application différentiable h de E_s dans E_i tels que*
(a) $W_s(V) = \{x \in V \mid x = \bar{x} + (x_s, h(x_s)),\ |x_s| < r\}$,
(b) $h(0) = 0$ et $Dh(0) = 0$,
(c) pour tout α vérifiant $Re(\sigma(A_s)) < -\alpha < 0$, il existe une constante C_α telle que

$$W_s(V) = \{x \in V \mid |\phi_t(x) - \bar{x}| \leq C_\alpha e^{-\alpha t} \text{ pour tout } t \geq 0\}.$$

De manière analogue, on a le théorème d'existence et de caractérisation de la variété instable.

Théorème 7.1.2 *(Théorème de la variété instable) Il existe un voisinage V de $\bar{x}$, $r > 0$, et une application différentiable k de E_i dans E_s tels que*
(a) $W_i(V) = \{x \in V \mid x = \bar{x} + (k(x_i), x_i),\ |x_i| < r\}$,
(b) $k(0) = 0$ et $Dk(0) = 0$,
(c) pour tout α vérifiant $0 < \alpha < Re(\sigma(A_i))$, il existe une constante C_α telle que

$$W_i(V) = \{x \in V \mid |\phi_t(x) - \bar{x}| \leq C_\alpha e^{\alpha t} \text{ pour tout } t \leq 0\}.$$

Preuve du théorème de la variété stable. Pour simplifier supposons que $\bar{x} \equiv 0$. Nous avons donc $A = Df(0)$, et $f(x) = Ax + g(x)$ avec $\lim_{|x|\to 0} g(x)/|x| = 0$. Il existe une matrice C inversible telle que

$$B = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \widehat{P} & 0 \\ 0 & \widehat{Q} \end{pmatrix},$$

où $\widehat{P}$ est une matrice $k \times k$ ayant k valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_k$ à partie réelle négative, $\widehat{Q}$ est une matrice $(n-k) \times (n-k)$ ayant $(n-k)$ valeurs propres à partie réelle positive. Soit α tel que $\mathrm{Re}(\lambda_j) < -\alpha < 0$ pour tout $j = 1, ..., k$. Posons

$$e^{tP} = \begin{pmatrix} e^{t\widehat{P}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e^{tQ} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{t\widehat{P}} \end{pmatrix}.$$

Il existe $K > 0$ et $\nu > 0$ (suffisamment petit) tels que

$$\|e^{tP}\| \leq Ke^{-(\alpha+\nu)t} \quad \text{pour tout } t \geq 0,$$

et

$$\|e^{tQ}\| \leq Ke^{\nu t} \quad \text{pour tout } t \leq 0.$$

Avec le changement de variable $y = C^{-1}x$, l'équation $x' = Ax + g(x)$ se transforme en $y' = By + G(y)$, où $G(y) = C^{-1}g(Cy)$. Étant donné que $g(x) = f(x) - Ax = f(x) - Df(0)x$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\tilde{\delta}(\varepsilon)$ tel que g soit Lipschitzienne de rapport ε sur la boule $B(0, \tilde{\delta}(\varepsilon))$. De même G est Lipschitzienne de rapport ε sur une boule $B(0, \delta(\varepsilon))$, pour un certain $\delta(\varepsilon) > 0$. Choisissons $0 < \varepsilon < \frac{\nu}{4K}$, et posons $\delta \equiv \delta(\varepsilon)$. On note ψ_t le flot du système $y' = By + G(y)$. Nous établissons le théorème de la variété stable pour le flot ψ_t. La caractérisation de la variété stable pour ϕ_t s'en déduit par changement de variable. Nous désignons encore par E_s et E_i les sous-espaces stable et instable du système $y' = By$. Remarquons que, pour tout $|y| < \delta$, $\psi_t(y)$ vérifie l'équation

$$\psi_t(y) = e^{tB}y + \int_0^t e^{(t-s)B}G(\psi_s(y))ds$$

(on utilise cette identité au lemme 7.1.3).

Lemme 7.1.1 *Pour tout $a \in E_s$ vérifiant $|a| < \frac{\delta}{2K}$, l'équation intégrale*

$$y(t) = e^{tP}a + \int_0^t e^{(t-s)P}G(y(s))ds - \int_t^\infty e^{(t-s)Q}G(y(s))ds \tag{7.1}$$

admet une solution unique, notée $y(t;a)$, vérifiant

$$|y(t;a)| \leq 2K|a|e^{-\alpha t}.$$

Preuve. On utilise la méthode des approximations successives. Posons $y^{(0)} = 0$ et, $y^{(j)}$ étant connu, définissons $y^{(j+1)}$ par

$$y^{(j+1)}(t) = e^{tP}a + \int_0^t e^{(t-s)P}G(y^{(j)}(s))ds - \int_t^\infty e^{(t-s)Q}G(y^{(j)}(s))ds.$$

Par récurrence sur j, on démontre que

$$|y^{(j)}(t) - y^{(j-1)}(t)| \leq \frac{K|a|e^{-\alpha t}}{2^{j-1}} \quad \text{pour tout } j \in \mathbb{N}^*. \tag{7.2}$$

On vérifie aisément (7.2) pour $j = 1$. Supposons que (7.2) soit vérifiée pour $j = 1, ..., m$. On en déduit

$$|y^{(j)}(t)| \leq 2K|a|e^{-\alpha t} < \delta \quad \text{pour tout } j = 1, ..., m.$$

Avec la définition de $y^{(m)}$ et $y^{(m+1)}$, on obtient

$$\begin{aligned}
& |y^{(m+1)}(t) - y^{(m)}(t)| \\
\leq\ & \int_0^t \|e^{(t-s)P}\|\varepsilon|y^{(m)}(s) - y^{(m-1)}(s)|ds + \int_t^\infty \|e^{(t-s)Q}\|\varepsilon|y^{(m)}(s) - y^{(m-1)}(s)|ds \\
\leq\ & \varepsilon \int_0^t Ke^{-(\alpha-\nu)(t-s)} \frac{K|a|e^{-\alpha s}}{2^{m-1}} ds + \varepsilon \int_t^\infty Ke^{\nu(t-s)} \frac{K|a|e^{-\alpha s}}{2^{m-1}} ds \\
\leq\ & \frac{\varepsilon K^2|a|e^{-\alpha t}}{\nu 2^{m-1}} + \frac{\varepsilon K^2|a|e^{-\alpha t}}{(\alpha+\nu)2^{m-1}} \\
\leq\ & \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) \frac{K^2|a|e^{-\alpha t}}{2^{m-1}} = \frac{K^2|a|e^{-\alpha t}}{2^m},
\end{aligned}$$

car $\varepsilon K/\nu < 1/4$. La relation (7.2) est donc établie. Nous en déduisons

$$|y^{(n)}(t) - y^{(m)}(t)| \leq \Sigma_{j=N}^\infty |y^{(j+1)}(t) - y^{(j)}(t)| \leq \Sigma_{j=N}^\infty \frac{K|a|e^{-\alpha t}}{2^j} \leq \frac{K|a|}{2^{N-1}},$$

pour tout $n > m > N$. La suite $(y^{(n)})_n$ est donc une suite de Cauchy dans $C([0,\infty);\mathbb{R}^n)$. Soit y la limite de $(y^{(n)})_n$. Par passage à la limite on démontre que la fonction limite y est solution de l'équation intégrale. L'unicité se démontre de manière classique.

Lemme 7.1.2 *Si $\psi_t(\hat{y})$ vérifie l'équation intégrale*

$$\psi_t(\hat{y}) = e^{tP}\hat{y} + \int_0^t e^{(t-s)P}G(\psi_s(\hat{y}))ds - \int_t^\infty e^{(t-s)Q}G(\psi_s(\hat{y}))ds \tag{7.3}$$

alors $y(t;a) = \psi_t(\hat{y})$ vérifie (7.1) pour $a = \pi_s\hat{y}$.

Preuve. Le lemme est une conséquence directe de l'égalité $e^{tP}\hat{y} = e^{tP}\pi_s\hat{y}$.

Lemme 7.1.3 *Si $(\psi_t(\hat{y}))_{t\geq 0}$ est bornée, alors $\psi_t(\hat{y})$ vérifie l'équation intégrale (7.3).*

Preuve. Par définition du flot ψ_t, $\psi_t(\hat{y})$ vérifie l'équation

$$\psi_t(\hat{y}) = e^{tB}\hat{y} + \int_0^t e^{(t-s)B}G(\psi_s(\hat{y}))ds. \tag{7.4}$$

En composant (7.4) avec π_s et π_i, nous avons

$$\pi_s(\psi_t(\hat{y})) = e^{tP}\hat{y} + \int_0^t e^{(t-s)P}G(\psi_s(\hat{y}))ds \quad \text{et} \quad \pi_i(\psi_t(\hat{y})) = e^{tQ}\hat{y} + \int_0^t e^{(t-s)Q}G(\psi_s(\hat{y}))ds.$$

On en déduit

$$e^{-tQ}\pi_i(\psi_t(\hat{y})) = \pi_i\hat{y} + \int_0^t e^{-sQ}G(\psi_s(\hat{y}))ds.$$

Si $(\psi_t(\hat{y}))_{t\geq 0}$ est bornée, alors

$$\lim_{t\to\infty} e^{-tQ}\pi_i(\psi_t(\hat{y})) = 0.$$

On a donc
$$\pi_i\hat{y} = -\int_0^\infty e^{-sQ}G(\psi_s(\hat{y}))ds,$$
soit encore
$$e^{tQ}\hat{y} = e^{tQ}\pi_i\hat{y} = -\int_0^\infty e^{(t-s)Q}G(\psi_s(\hat{y}))ds.$$
En reportant cette égalité dans $\pi_i(\psi_t(\hat{y}))$, on obtient
$$\pi_i(\psi_t(\hat{y})) = -\int_t^\infty e^{(t-s)Q}G(\psi_s(\hat{y}))ds.$$
Le lemme est donc démontré.

Suite de la preuve du théorème. Pour tout $a \in E_s$, vérifiant $|a| < \frac{\delta}{2K}$, posons
$$h_j(a) = y_j(0;a) = -(\int_0^\infty e^{-sQ}G(y(s;a))ds)_j \quad \text{pour } j = k+1, ..., n,$$
où $y = (y_1, ..., y_n)$ est la solution de (7.1).

1 - Montrons que $\psi_t(a, h(a)) = y(t;a)$ pour tout $t \geq 0$. Nous avons
$$\begin{aligned} y(t) &= e^{tP}a + \int_0^t e^{(t-s)P}G(y(s))ds - \int_t^0 e^{(t-s)Q}G(y(s))ds - \int_0^\infty e^{(t-s)Q}G(y(s))ds \\ &= e^{tP}a + e^{tQ}h(a) + \int_0^t e^{(t-s)B}G(y(s))ds \\ &= e^{tB}(a, h(a)) + \int_0^t e^{(t-s)B}G(y(s))ds. \end{aligned}$$
Comme $\psi_t(a, h(a))$ est l'unique solution de
$$\psi_t(a, h(a)) = e^{tB}(a, h(a)) + \int_0^t e^{(t-s)B}G(\psi_s(a, h(a)))ds,$$
on a montré que $\psi_t(a, h(a)) = y(t;a)$. Du lemme 7.1.1, on déduit que $\lim_{t\to\infty}\psi_t(a, h(a)) = 0$. D'où, $(a, h(a))$ appartient à W_s.

2 - Soient $\bar{y}$ et $\hat{y}$ deux points de W_s tels que $\pi_s\bar{y} = \pi_s\hat{y}$. Les points $\bar{y}$ et $\hat{y}$ appartenant à W_s, $(\psi_t(\bar{y}))_{t\geq 0}$ et $(\psi_t(\hat{y}))_{t\geq 0}$ sont bornées. D'après le lemme 7.1.3, $\psi_t(\bar{y})$ et $\psi_t(\hat{y})$ vérifient (7.3). Du lemme 7.1.2, on déduit $\psi_t(\bar{y}) = y(t;\pi_s\bar{y})$ et $\psi_t(\hat{y}) = y(t;\pi_s\hat{y})$ pour tout $t \geq 0$. Étant donné que $\pi_s\bar{y} = \pi_s\hat{y}$, on a $\psi_t(\bar{y}) = \psi_t(\hat{y})$ pour tout $t \geq 0$. En particulier pour $t = 0$, on a $\bar{y} = \hat{y}$. Nous avons donc démontré que, si $a \in E_s \cap B(0, \frac{\delta}{2K})$, $(a, h(a))$ est le seul point de W_s. L'assertion (a) du théorème est établie.

3 - Montrons (c). Si $|\psi_t(\hat{y})| \leq C_\alpha e^{-\alpha t}$, alors $\hat{y}$ appartient à W_s. Réciproquement, soit $\hat{y} \in W_s$. De (a) nous déduisons $\hat{y} = (\pi_s\hat{y}, h(\pi_s\hat{y}))$, et $\psi_t(\hat{y}) = y(t;\pi_s\hat{y})$. L'estimation obtenue sur y au lemme 7.1.1 donne l'estimation $|\psi_t(\hat{y})| \leq C_\alpha e^{-\alpha t}$.

4 - Montrons (b). L'égalité $h(0) = 0$ découle de l'unicité obtenue au lemme 7.1.1. On peut démontrer que l'équation
$$z(t) = e^{tP}b + \int_0^t e^{(t-s)P}DG(y(s))z(s)ds - \int_t^\infty e^{(t-s)Q}DG(y(s))z(s)ds$$

admet une solution unique, et que cette solution est égale à $\frac{\partial y}{\partial a}(\cdot; a)b$. Pour tout $b \in \mathbb{R}^n$, on a

$$Dh(0)b = -\int_0^\infty e^{-sQ} DG(0) z(s) ds,$$

avec $z(t) = e^{tP}b$. Étant donné que $DG(0) = 0$, l'assertion (b) est démontrée.

Chapitre 8

Problèmes

8.1 Problème 1

3 heures 25 Novembre 1999

Pour toute constante $c \in \mathbb{R}^-$, on désigne par (S_c) le système différentiel de $\mathbb{R}^2$:

$$(S_c) \qquad \begin{array}{rcl} v'(t) & = & w(t), \\ w'(t) & = & -c\, w(t) - f(v(t)), \end{array}$$

où $f(v) = -v(v-1)(v-3)$.

Notations. Dans la suite ϕ_t^c désigne le flot du système (S_c). On pose

$$\begin{array}{rcl} U & = & \{(v,w) \mid 0 < v < 3,\ w \in \mathbb{R}\}, \quad E(v,w) = \frac{w^2}{2} - \frac{v^4}{4} + \frac{4v^3}{3} - \frac{3v^2}{2}, \\ D & = & \{(v,w) \mid 0 \leq v \leq a,\ E(v,w) \leq 0\},\ \text{avec } a = \frac{8-\sqrt{10}}{3}, \\ \operatorname{int}(D) & = & \{(v,w) \mid 0 < v < a,\ E(v,w) < 0\}. \end{array}$$

Les réponses doivent être précises et courtes. Les parties 1, 2, et 3 sont indépendantes.

Question préliminaire. Montrer que pour toute condition initiale $(v(0), w(0))$ dans U, le système (S_c) admet une solution maximale unique. Montrer qu'il existe une constante $M > 0$, indépendante de $(v(0), w(0))$, telle que $w(t)^2 \leq (M + |w(0)|^2)\exp(|-2ct|)$ pour tout t appartenant à l'intervalle maximal de définition $I =]T_m, T_M[$.

Partie 1. On suppose dans cette partie que $c \equiv 0$. Le système correspondant est noté (S_0).
1.1 - Montrer que E est une intégrale première de (S_0).
1.2 - Soit $0 < \bar{v} < 1$. Posons $\phi_t^0(\bar{v}, 0) = (v(t), w(t))$. Montrer qu'il existe $t_1 > 0$ tel que $w(t) > 0$ si $t \in]0, t_1[$ et $w(t_1) = 0$. Montrer qu'il existe $t_2 > t_1$ tel que $w(t) < 0$ si $t \in]t_1, t_2[$ et $w(t_2) = 0$. En déduire que la solution est périodique.
1.3 - Quels sont les points d'équilibre de (S_0), quelle est leur nature ? Déterminer l'équation de la variété instable de (S_0) en $(0,0)$ sous la forme $w = \psi(v)$.

Partie 2. On rappelle que $c \leq 0$.
2.1 - Quel est l'espace instable du système linéaire

$$\begin{array}{rcl} v'(t) & = & w(t), \\ w'(t) & = & -c\, w(t) + 3\, v(t). \end{array}$$

Préciser sa dimension, son équation.
2.2 - Montrer qu'il existe une solution maximale (ν_c, ω_c) de (S_c) dans l'ouvert U (unique à une translation de temps près), telle que $(\nu_c, \omega_c)(-\infty) = (0, 0)$.
2.3 - Soit (ν_c, ω_c) une des solutions définies à la question 2.2. Calculer $\frac{d}{dt}E(\nu_c(t), \omega_c(t))$. En déduire que, si $c < 0$, cette trajectoire n'a aucun point commun avec D. Montrer qu'il existe τ_c tel que $\nu_c(\tau_c) = (a+1)/2$ et $\nu_c(t) < (a+1)/2$ pour tout $t < \tau_c$. Montrer que $\omega_c(\tau_c)$ ne dépend que de c, et pas de la solution (ν_c, ω_c) choisie. On pose $y(c) = \omega_c(\tau_c)$.
2.4 - Montrer qu'il existe $d < 0$, indépendant de c tel que $\frac{-f(\nu_c(t))}{\omega_c(t)} \geq d$ pour tout $t \in \nu_c^{-1}([1, \frac{a+1}{2}])$. Montrer que $\frac{\omega_c'(t)}{\nu_c'(t)} \geq -c + d$ pour tout $t \in]-\infty, \tau_c]$. En déduire que $y(c) \geq ((-c+d)(a+1))/2$ et que $\lim_{c\to-\infty} y(c) = +\infty$.

Partie 3.
3.1 - Montrer qu'il existe une solution maximale (v_c, w_c) de (S_c) dans l'ouvert U (unique à une translation de temps près), telle que $(v_c, w_c)(\infty) = (3, 0)$.
3.2 - Soit (v_c, w_c) une des solutions définies à la question 3.1. Montrer que $w_c(t) > 0$ pour tout $t \in v_c^{-1}(]\frac{a+1}{2}, 3[)$. Montrer qu'il existe t_c tel que $v_c(t_c) = (a+1)/2$ et $v_c(t) > (a+1)/2$ pour tout $t > t_c$. Montrer que $w_c(t_c)$ ne dépend que de c, et pas de la solution (v_c, w_c) choisie. On pose $z(c) = w_c(t_c)$.
3.3 - Montrer que $z(c) \leq z(0)$ pour tout $c \leq 0$.

Partie 4. On admet dans cette partie que $z(c)$ et $y(c)$ dépendent continûment de c. Ce résultat sera établi dans la partie 6.
4.1 - Montrer que $z(0) > y(0)$. En déduire qu'il existe $\bar{c} < 0$ tel que $z(\bar{c}) = y(\bar{c})$.
4.2 - Montrer qu'il existe une solution $(\bar{v}, \bar{w})$ de $(S_{\bar{c}})$ (unique à une translation de temps près), telle que $0 \leq \bar{v} \leq 3$, $\bar{w} \geq 0$, $(\bar{v}, \bar{w})(-\infty) = (0, 0)$ et $(\bar{v}, \bar{w})(\infty) = (3, 0)$.

Partie 5.
Montrer que si $u(x,t) = v(x - ct)$, $c < 0$, $u_t - u_{xx} = f(u)$ pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ (u_t désigne la dérivée partielle de u par rapport à t et u_{xx} la dérivée partielle seconde par rapport à x), $0 \leq v(\xi) \leq 3$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\lim_{\xi\to\infty} v(\xi) = 3$, $\lim_{\xi\to-\infty} v(\xi) = 0$, alors $(v, w) = (v, v')$ vérifie les conditions de la question 4.2.

Partie 6. Le but de cette partie est de montrer que les applications $c \mapsto y(c)$ et $c \mapsto z(c)$ définies aux parties 2 et 3 sont continues sur $\mathbb{R}^-$. On démontre le résultat pour y, la preuve est analogue pour z.
6.1 - Soient $c_1 \leq 0$, $c_2 \leq 0$, $0 < v^{(0)} < 1$, $0 < w^{(0)}$ tels que $(v^{(0)}, w^{(0)}) \notin D$. Pour $i = 1, 2$, notons (v_i, w_i) la solution maximale de (S_{c_i}) dans U vérifiant $(v_i(0), w_i(0)) = (v^{(0)}, w^{(0)})$. Montrer que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(w_2 - w_1)^2(t)$$

$$= -c_2(w_2(t) - w_1(t))^2 + w_1(t)(c_1 - c_2)(w_2(t) - w_1(t)) + f(v_1(t)) - f(v_2(t))(w_2(t) - w_1(t)),$$

pour tout $t \in I_1 \cap I_2$, où I_i est l'intervalle maximal de définition de la solution (v_i, w_i). En déduire que, pour tout intervalle borné $I \subset I_1 \cap I_2$, avec $0 \in I$, on a

$$|w_2(t) - w_1(t)| \leq \sup_{t\in I}|w_1(t)|\ |c_1 - c_2|\ C(I) \quad \text{pour tout } t \in I,$$

où $C(I)$ est une constante dépendant de I, c_2 et f.
6.2 - Montrer qu'il existe un intervalle $[0, \delta]$ et une application k_c de $[0, \delta]$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que

$\lim_{t\to-\infty}\phi_t^c(\varepsilon, k_c(\varepsilon)) = (0,0)$ pour tout $\varepsilon \in [0,\delta]$. Du cours on peut déduire que $|k_c(\varepsilon)| \leq H(c)|\varepsilon|$, où H est une fonction continue de $\mathbb{R}^-$ dans $\mathbb{R}^+$. Ce résultat est ici admis. Notons (v_c, w_c) la solution maximale de (S_c) dans U vérifiant $(v_c(0), w_c(0)) = (\varepsilon, k_c(\varepsilon))$. Montrer que t_c est la solution de l'équation d'inconnue t : $\varepsilon + \int_0^t w_c(s)ds = \frac{a+1}{2}$. En déduire que $c \mapsto t_c$ est de classe C^1.
6.3 - Montrer que $t_c = \int_\varepsilon^{\frac{a+1}{2}} \frac{d\xi}{w_c(v_c^{-1}(\xi))}$. En déduire que $t_c \leq t_0$ pour tout $c \leq 0$ (t_0 correspond à t_c pour $c = 0$).
6.4 - Montrer que $c \mapsto y(c)$ est continue sur $\mathbb{R}^-$.

Rappel de cours. Soit u une fonction positive ou nulle, continue sur un intervalle $[T_1, T_2]$ avec $T_1 < 0 < T_2$, et vérifiant $u(t) \leq \alpha + |\int_0^t b(s)u(s)ds|$ pour tout $t \in [T_1, T_2]$, où $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et b est continue positive ou nulle sur $\mathbb{R}^+$. Alors $u(t) \leq \alpha \exp(|\int_0^t b(s)ds|)$.

8.2 Problème 2

(1 heure) **9 Février 2000**

On considère le système différentiel de $\mathbb{R}^2$:

$$(E) \qquad \begin{array}{rcl} x'(t) &=& y(t) - F(x(t)), \\ y'(t) &=& -x(t), \end{array}$$

où $F(x) = x^3 - x$. Le but du problème est de montrer l'existence de solutions périodiques pour ce système.

Notations. Dans la suite, on pose $x_0 = \sqrt{2}$, $y_0 = 6$, $V(x,y) = \frac{1}{2}(y-\sqrt{2})^2 + \frac{x^2}{2}$.

1. Montrer que, pour tout $x \in [-x_0, x_0]$, pour tout $y \in [6-\sqrt{2}, 6+\sqrt{2}]$, on a

$$\frac{|-x|}{|y - F(x)|} < \frac{1}{2}.$$

Remarquer que le triangle $D = \{(x,y) \mid x \in [-x_0, x_0],\ |y - y_0| \leq \frac{1}{2}(x + x_0)\}$ est inclus dans $[-x_0, x_0] \times [6-\sqrt{2}, 6+\sqrt{2}]$.
Soit $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))_{t\in[0,t_{max}[}$ la solution maximale de (E) vérifiant $(\bar{x}(0), \bar{y}(0)) = (-x_0, y_0)$. Montrer que, pour $t > 0$, t petit, on a

$$|\int_0^t \bar{y}'(\tau)d\tau| < \frac{1}{2}(\bar{x}(t) + x_0).$$

Montrer qu'il existe $T > 0$ tel que

$$-\frac{1}{2}(\bar{x}(t) + x_0) < \bar{y}(t) - y_0 < \frac{1}{2}(\bar{x}(t) + x_0) \quad \text{pour tout } t \in]0,T], \quad \text{et } \bar{x}(T) = x_0.$$

On pose $y_1 = \bar{y}(T)$. On a donc $y_0 - \sqrt{2} < y_1 < y_0 + \sqrt{2}$.

2. Construction d'une région positivement invariante.
Dans cette partie, on construit une région M du plan, simplement connexe, positivement invariante, symétrique par rapport à l'origine, de frontière $\Gamma = \Gamma_1^+ \cup \Gamma_2^+ \cup \Gamma_3^+ \cup \Gamma_1^- \cup \Gamma_2^- \cup \Gamma_3^-$. Pour $i = 1, 2, 3$, Γ_i^+ et Γ_i^- sont symétriques par rapport à l'origine, et

$$\begin{array}{rcl} \Gamma_1^+ &=& \{(\bar{x}(t), \bar{y}(t))_{t\in[0,T]} \mid (\bar{x}, \bar{y}) \text{ est la solution de } (E) \text{ définie en } \mathbf{1}\}, \\ \Gamma_2^+ &=& \{(x,y) \mid V(x,y) = V(x_0, y_1),\ \ x > x_0\}, \\ \Gamma_3^+ &=& \{(x,y) \mid x = x_0,\ -y_0 \leq y \leq -y_1 + 2\sqrt{2}\}. \end{array}$$

Observer que $V(x_0, y_1) = V(x_0, -y_1 + 2\sqrt{2})$. Pour $(x,y) \in \Gamma$, on note $\vec{n}(x,y)$ la normale unitaire à Γ, intérieure à M (lorsque cette normale existe). On pourra utiliser $\vec{n}(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) = (-\bar{y}'(t), \bar{x}'(t))/\|(-\bar{y}'(t), \bar{x}'(t))\|$ pour $t \in]0,T]$. Montrer que $\vec{n}(x,y) \cdot (y - F(x), -x)^T \geq 0$ pour tout $(x,y) \in \Gamma_1^+ \cup \Gamma_2^+$. Montrer que M est positivement invariante.

3. Écrire le système différentiel linéarisé au point d'équilibre $(0,0)$. Quelle est la nature de $(0,0)$ pour le système linéarisé. Montrer l'existence de solutions périodiques pour (E).

8.3 Problème 3

(2 heures) 13 Septembre 2000

On considère le système différentiel de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$:

$$(S) \qquad \begin{array}{rcl} u'(t) & = & v(t), \\ v'(t) & = & ku(t)\ell n(u(t)). \end{array}$$

Le but du problème est d'étudier les solutions de l'équation différentielle

$$(E) \qquad x'' - x'^2 - kx = 0,$$

à l'aide du système (S).

1. Montrer que $H(u,v) = v^2 + k(\frac{1}{2}u^2 - u^2\ell n(u))$ est une intégrale première de (S). Montrer que x est solution de (E) si, et seulement si, $u = e^{-x}$, $v = -e^{-x}x'$ est solution de (S).

2. Déterminer le point d'équilibre $(\bar{u}, \bar{v}) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ de (S). Écrire (S) sous la forme

$$\begin{pmatrix} u - \bar{u} \\ v - \bar{v} \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} u - \bar{u} \\ v - \bar{v} \end{pmatrix} + g(u - \bar{u}, v - \bar{v}),$$

où $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, et g vérifie $\lim_{(u,v)\to(\bar{u},\bar{v})} \|g(u - \bar{u}, v - \bar{v})\| / \|(u - \bar{u}, v - \bar{v})\| = 0$. Déterminer en fonction de k la nature du point d'équilibre $(\bar{u}, \bar{v})$ du système linéaire

$$\begin{pmatrix} u - \bar{u} \\ v - \bar{v} \end{pmatrix}' = A \begin{pmatrix} u - \bar{u} \\ v - \bar{v} \end{pmatrix}.$$

Partie 1. Dans cette partie, on suppose que $k = -1$.

3. Soit $0 < u_0 < 1$, on note (u, v) la solution maximale de (S) vérifiant $(u(0), v(0)) = (u_0, 0)$. Montrer qu'il existe $0 < t_1 < t_2 < \infty$ tels que $v(t) > 0$ sur $]0, t_2[$, $v(t_2) = 0$, $u_0 < u(t) < 1$ sur $]0, t_1[$, $u(t_1) = 1$, $u(t_1) < u(t) < u(t_2)$ sur $]t_1, t_2[$. Quelles sont les équations algébriques vérifiées par $(u(t_1), v(t_1))$ et par $u(t_2)$? Montrer que (u, v) est une solution périodique.

4. Soit $v_0 < 0$ tel que $v_0^2 - \frac{1}{2} \geq 0$. On note $(u(t), v(t))_{t\in]t^-, t^+[}$ la solution maximale de (S) vérifiant $(u(0), v(0)) = (1, v_0)$. Soit $v^+ < 0$ vérifiant $(v^+)^2 = v_0^2 - \frac{1}{2}$. Montrer que $0 < u(t) < 1$ et $v_0 < v(t) < v^+ \leq 0$ sur $]0, t^+[$, puis que $\lim_{t\nearrow t^+} u(t) = 0$, et $\lim_{t\nearrow t^+} v(t) = v^+$.

5. Donner l'allure des trajectoires de (S) dans le plan de phase.

Partie 2. Dans cette partie, on suppose que $k = 1$.

6. Montrer qu'il existe des solutions (u, v) de (S) telles que $\lim_{t\to\infty}(u(t), v(t)) = (1, 0)$. Montrer, de même, qu'il existe des solutions (u, v) de (S) telles que $\lim_{t\to-\infty}(u(t), v(t)) = (1, 0)$.

7. Soit $v_0 > 0$. Montrer que la solution maximale de (S) vérifiant $(u(0), v(0)) = (1, v_0)$ est définie sur tout $\mathbb{R}^+$ et que $\lim_{t\to\infty}(u(t), v(t)) = (\infty, \infty)$. Soit $v^- > 0$ tel que $(v^-)^2 = v_0^2 + \frac{1}{2}$, et soit $]t^-, \infty[$ l'intervalle maximal de définition de (u, v). Montrer que $\lim_{t\searrow t^-}(u(t), v(t)) = (0, v^-)$.

8. Donner l'allure des trajectoires de (S) dans le plan de phase.

8.4 Références

H. Amann, Ordinary differential equations, An introduction to nonlinear analysis, W. de Gruyter, Berlin, 1990.

J. M. Arnaudies, Équations différentielles, Ellipses, 2000.

V. Arnold, Équations différentielles ordinaires, Éd. de Moscou 1974, reédité Éd. du Globe 1996 (5-ième édition).

C. Chicone, Ordinary differential equations with applications, Springer-Verlag, 1999.

E. A. Coddington, N. Levinson, Theory of ordinary differential equations, Mc Graw Hill, 1955.

M. Crouxeix, A. L. Mignot, Analyse Numérique des équations différentielles, Masson, 1984.

M. Crouxeix, A. L. Mignot, Exercices d'Analyse Numérique des équations différentielles, Masson, 1993 (1-ière édition 1986).

J. P. Demailly, Analyse Numérique et équations différentielles, nouvelle édition, Presses Universitaires de Grenoble, 1996.

A. C. Fowler, Mathematical models in applied sciences, Cambridge University Press, 1997.

W. Hirsch, S. Smale, Differential equations, dynamical systems and linear algebra, Academic Press, 1974.

J. H. Hubbard, B. H. West, Differential equations : A dynamical systems approach, Higher dimensional systems, Springer-Verlag, 1995.

J. H. Hubbard, B. H. West, Équations différentielles, Ed. Cassini, 1999.

M. Mantion, problèmes de mécanique analytique, questions de stabilité, Vuibert, 1981.

J. D. Murray, Mathematical Biology, second edition, Springer-Verlag, 1993.

L. Perko, Differential equations and dynamical systems, Second edition, Springer-Verlag, 1996.

H. Reinhard, Équations différentielles, fondements et applications, Dunod, 1989.

N. Rouche, J. Mawhin, Équations différentielles ordinaires, Tome 1 : Théorie générale, Tome 2 : Stabilité et solutions périodiques, Masson, 1973.

P. N. V. Tu, Dynamical systems, an introduction with applications in Economics and Biology, second edition, Springer-Verlag, 1994.

F. Verhulst, Nonlinear differential equations and dynamical systems, Second edition, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1996.