DS3 (le 28 avril)

Durée : 1h30 (calculatrice et documents interdits)

Questions de cours. Soit $[a, b]$ avec $-\infty < a < b < +\infty$ un segment de $\mathbb{R}$. Etant donné $n \in \mathbb{N}^*$, on se donne une subdivision $\mathcal{S} = (s_0, \cdots, s_n)$ de $[a, b]$ à $(n+1)$ points, avec $a = s_0 < s_1 < \cdots < s_{n-1} < s_n = b$. On considère une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ qui est bornée.

(a) Rappeler comment sont définis les s_k (pour $0 \le k \le n$) pour la *subdivision régulière* de $[a, b]$ à $(n+1)$ points. On note $\mathcal{S}_r^n(a, b)$ cette subdivision.

(b) Rappeler ce qu'est la *somme de Riemann* à gauche de f pour la subdivision $\mathcal{S}_r^n(a, b)$. Il s'agit de la somme qui est obtenue par la méthode des rectangles à gauche.

(c) Rappeler ce qu'est la *somme de Darboux inférieure* $\sigma(f, \mathcal{S})$ de f pour la subdivision $\mathcal{S}$.

Exercice 1. L'objectif est de calculer par un procédé d'approximation la valeur de $I := \displaystyle\int_0^1 e^t \, dt$.

1.1. Etant donné $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, \cdots, n-1\}$, déterminer ce que vaut le nombre c_k^n défini par

$$c_k^n := \inf \{ \, e^t \, ; \, t \in [k/n, (k+1)/n[\, \}.$$

1.2. On considère la *fonction en escalier* $g^n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ donnée par

$$g^n(t) = c_k^n, \qquad \forall \, t \in [k/n, (k+1)/n[.$$

On pose $I^n := \displaystyle\int_0^1 g^n(t) \, dt$.

1.2.a. Expliquer pourquoi on a $I^n \le I$.

1.2.b. Calculer en fonction de n la valeur de I^n *(reconnaître une série géométrique).*

1.2.c. Prouver que I_n admet une limite finie (notée $\mathcal{I}$) lorsque n tend vers $+\infty$ et la calculer *(on rappelle que la limite du quotient* $(\mathrm{e}^t - 1)/t$ *vaut* 1 *lorsque* t *tend vers* 0*).*

1.2.d. Expliquer pourquoi on a $\mathcal{I} = I$, et vérifier ce résultat par un calcul direct de I.

Exercice 2. Déterminer (sur des domaines de définition ad hoc et en s'aidant des indications fournies à droite) une primitive F des fonctions f suivantes.

2.1 $f(x) = \dfrac{(5\sqrt{x} + x)\,(x+1)}{x^2 + x}$ *(simplifier la fraction)*

2.2. $f(x) = \dfrac{1}{x\,(x-1)}$ *(décomposer en éléments simples)*

2.3. $f(x) = \sin^3 x$ *(isoler un* $\sin$ *fois un polynôme en* $\cos$*)*

Exercice 3. L'objectif de cet exercice est d'utiliser le changement de variables $u = \tan(t/2)$ en vue de calculer $J := \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{1+\cos t}\,dt$. On rappelle que $\sin t = \dfrac{2u}{1+u^2}$ et $\cos t = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}$.

3.1 En remarquant que $t = 2\arctan u$, justifier la formule $dt = \dfrac{2\,du}{1+u^2}$.

3.2. Expliquer pourquoi on a $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{2u}{1+u^2}\,du$.

3.3. Calculer J.

Problème.

P.1. On s'intéresse sur $\mathbb{R}_+^*$ à la primitive valant 0 en 1, notée $F(x)$, de la fonction $f : t \to \ln t$.

P.1.a. Utiliser un calcul direct pour prouver que $F(x) = x\ln x - x + 1$.

P.1.b. Expliquer pourquoi on a $F(x) = \displaystyle\int_1^x \ln t\,dt$ puis retrouver l'expression ci-dessus de $F(x)$ via une intégration par parties.

P.2. On étudie ici l'intégrale généralisée $K := \displaystyle\int_0^1 \ln t\,dt$.

P.2.a. Y-a-t'il des points incertains ? Le(s)quel(s) ? Justifier la réponse.

P.2.b. Montrer que l'intégrale K est convergente et la calculer.

P.2.c. Déduire de ce qui précède que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt$ est convergente.

P.3. On considère la fonction $\varphi : [1,+\infty[\to]0,1]$ qui à u associe $t = \varphi(u) = 1/u$.

P.3.a. Calculer $\varphi(1)$, $\varphi'(u)$ ainsi que la limite de $\varphi(u)$ lorsque u tend vers $+\infty$. Expliquer pourquoi la fonction φ est strictement décroissante sur $[1,+\infty[$. On admet que la fonction φ détermine un *changement de variables*. Quelle est la fonction réciproque $\varphi^{-1}(t)$ de φ ?

P.3.b. On fixe $x \in]0,1]$. A l'aide du changement de variables $t = \varphi(u)$, justifier l'identité

$$\int_x^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt = -\int_1^{1/x} \frac{\ln u}{1+u^2}\,du.$$

P.3.c. En s'aidant des questions P.2.c et P.3.b, montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt$ est convergente.

P.3.d. Expliquer pourquoi l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt$ est convergente et vaut 0.

P.4. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on considère l'intégrale généralisée $G(x) := \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{x^2+t^2}\,dt$.

P.4.a. En minorant puis en majorant convenablement la fonction $\ln t/(x^2+t^2)$ respectivement sur les intervalles $]0,1]$ et $[1,+\infty[$, montrer que l'intégrale généralisée $G(x)$ est convergente.

P.4.b. Exploiter le changement de variables $t = xv$ pour prouver que $G(x) = \dfrac{\pi}{2x}\ln x$.