DS3 (le 28 avril) - Corrigé

Questions de cours. Soit $[a, b]$ avec $-\infty < a < b < +\infty$ un segment de $\mathbb{R}$. Etant donné $n \in \mathbb{N}^*$, on se donne une subdivision $\mathcal{S} = (s_0, \cdots, s_n)$ de $[a, b]$ à $(n+1)$ points, avec $a = s_0 < s_1 < \cdots < s_{n-1} < s_n = b$. On considère une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ qui est bornée.

(a) Rappeler comment sont définis les s_k (pour $0 \leq k \leq n$) pour la *subdivision régulière* de $[a, b]$ à $(n+1)$ points. On note $\mathcal{S}_r^n(a, b)$ cette subdivision.

(b) Rappeler ce qu'est la *somme de Riemann* à gauche de f pour la subdivision $\mathcal{S}_r^n(a, b)$. Il s'agit de la somme qui est obtenue par la méthode des rectangles à gauche.

(c) Rappeler ce qu'est la *somme de Darboux inférieure* $\sigma(f, \mathcal{S})$ de f pour la subdivision $\mathcal{S}$.

Voir le cours ou ce lien sur wikipédia.

Exercice 1. L'objectif est de calculer par un procédé d'approximation la valeur de $I := \displaystyle\int_0^1 e^t \, dt$.

1.1. Etant donné $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, \cdots, n-1\}$, déterminer ce que vaut le nombre c_k^n défini par

$$c_k^n := \inf \{ e^t \, ; \, t \in [k/n, (k+1)/n[\, \}.$$

La fonction e^t est croissante. Donc $c_k^n = e^{k/n}$.

1.2. On considère la *fonction en escalier* $g^n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ donnée par

$$g^n(t) = c_k^n, \qquad \forall \, t \in [k/n, (k+1)/n[.$$

On pose $I^n := \displaystyle\int_0^1 g^n(t) \, dt$.

1.2.a. Expliquer pourquoi on a $I^n \leq I$.

Par construction, on a

$$g^n(t) \leq e^t, \qquad \forall t \in [0, 1].$$

Comme l'intégration préserve les inégalités, on récupère :

$$I^n = \int_0^1 g^n(t) \, dt \leq \int_0^1 e^t \, dt = I.$$

1.2.b. Calculer en fonction de n la valeur de I^n *(reconnaître une série géométrique).*

On trouve

$$I^n = \sum_{k=0}^{n} \Big(\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} \Big) \, c_k^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n} \, e^{k/n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} (e^{1/n})^k = \frac{1}{n} \frac{(e^{1/n})^n - 1}{e^{1/n} - 1} = (e-1) \, \frac{1/n}{e^{1/n} - 1}.$$

1.2.c. Prouver que I_n admet une limite finie (notée $\mathcal{I}$) lorsque n tend vers $+\infty$ et la calculer *(on rappelle que la limite du quotient $(e^t - 1)/t$ vaut 1 lorsque t tend vers 0).*

Comme $1/n$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, en utilisant l'indication, on obtient

$$\lim_{n \to +\infty} I^n = (e-1) \lim_{t \to 0} \frac{t}{e^t - 1} = e - 1 = \mathcal{I}.$$

1.2.d. Expliquer pourquoi on a $\mathcal{I} = I$, et vérifier ce résultat par un calcul direct de I.

La fonction e^t est continue sur $[0,1]$. Elle est donc Riemann intégrable. Les sommes de Riemann construites à partir de f convergent donc vers I. Or la somme I^n coincide avec la somme de Riemann à gauche de f ainsi qu'avec sa somme de Darboux inférieure. On a donc

$$\mathcal{I} = I = [e^t]_0^1 = e - 1.$$

Exercice 2. Déterminer (sur des domaines de définition ad hoc et en s'aidant des indications fournies à droite) une primitive F des fonctions f suivantes.

2.1 $f(x) = \dfrac{(5\sqrt{x} + x)\,(x+1)}{x^2 + x}$ *(simplifier la fraction)*

La fonction f n'est autre que

$$f(x) = \frac{5\sqrt{x} + x}{x} = \frac{5}{\sqrt{x}} + 1.$$

De là, on récupère

$$F(x) = 10\,\sqrt{x} + x + C.$$

2.2. $f(x) = \dfrac{1}{x\,(x-1)}$ *(décomposer en éléments simples)*

La fonction f n'est autre que

$$f(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}.$$

De là, on récupère

$$F(x) = \ln\left|\frac{x-1}{x}\right| + C.$$

2.3. $f(x) = \sin^3 x$ *(isoler un* $\sin$ *fois un polynôme en* $\cos$*)*

La fonction f n'est autre que

$$f(x) = \sin x\,(1 - \cos^2 x).$$

De là, on récupère

$$F(x) = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x.$$

Exercice 3. L'objectif de cet exercice est d'utiliser le changement de variables $u = \tan(t/2)$ en vue de calculer $J := \int_0^{\pi/2} \frac{\sin t}{1+\cos t}\, dt$. On rappelle que $\sin t = \frac{2u}{1+u^2}$ et $\cos t = \frac{1-u^2}{1+u^2}$.

3.1 En remarquant que $t = 2\arctan u$, justifier la formule $dt = \frac{2\,du}{1+u^2}$.

Il s'agit juste d'écrire

$$dt = 2\ \arctan' u\, du = \frac{2\,du}{1+u^2}.$$

3.2. Expliquer pourquoi on a $J = \int_0^1 \frac{2u}{1+u^2}\, du$.

Pour $t = 0$*, on a* $u = \tan(0/2) = 0$*. Pour* $t = \pi/2$*, on a* $u = \tan(\pi/4) = 1$*. De sorte que*

$$J = \int_0^1 \frac{\frac{2u}{1+u^2}}{1+\frac{1-u^2}{1+u^2}}\ \frac{2\,du}{1+u^2}\ du = \int_0^1 \frac{2u}{1+u^2}\, du.$$

3.3. Calculer J.

$$J = \int_0^1 \frac{d}{du}\left[\ln(1+u^2)\right] du = \left[\ln(1+u^2)\right]_0^1 = \ln 2.$$

Problème.

P.1. On s'intéresse sur $\mathbb{R}_+^*$ à la primitive valant 0 en 1, notée $F(x)$, de la fonction $f : t \to \ln t$.

P.1.a. Utiliser un calcul direct pour prouver que $F(x) = x\ln x - x + 1$.

On a $F(1) = 1\ln 1 - 1 + 1 = 0$ *et*

$$F'(x) = x'\ \ln x + x\ln' x - 1 = \ln x + x\,\frac{1}{x} - 1 = \ln x.$$

P.1.b. Expliquer pourquoi on a $F(x) = \int_1^x \ln t\, dt$ puis retrouver l'expression ci-dessus de $F(x)$ via une intégration par parties.

C'est le théorème fondamental de l'intégration. L'intégrale $\int_1^x \ln t\, dt$ *est la primitive de* $\ln t$ *qui vaut* 0 *en* 1*. Par ailleurs*

$$\begin{aligned} F(x)\ &= \int_1^x 1 \times \ln t\, dt = [t\ \ln t]_1^x - \int_1^x t \times \ln' t\, dt \\ &= x\ \ln x - 1\ \ln 1 - \int_1^x 1\, dt = x\ \ln x - [t]_1^x = x\ \ln x - x + 1. \end{aligned}$$

P.2. On étudie ici l'intégrale généralisée $K := \int_0^1 \ln t\, dt$.

P.2.a. Y-a-t'il des points incertains ? Le(s)quel(s) ? Justifier la réponse.

La fonction qui à t *associe* $\ln t$ *est continue sur* $]0, 1]$*. Par contre* $\lim_{t\to 0+} \ln t = -\infty$. Il y a donc un seul point incertain, situé en 0.

P.2.b. Montrer que l'intégrale K est convergente et la calculer.
On peut utiliser la question P.1.a. Pour $x \in]0,1]$*, on a*

$$\int_x^1 \ln t \, dt = [x \ln x - x + 1]_x^1 = -x \ln x + x - 1.$$

Puis on fait tendre x *vers* 0 *pour récupérer*

$$\lim_{x \to 0+} \int_x^1 \ln t \, dt = -1 = K.$$

P.2.c. Déduire de ce qui précède que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2} \, dt$ est convergente.
Il suffit d'observer que

$$\ln t \leq \frac{\ln t}{1+t^2} \leq 0, \qquad \forall\, t \in]0,1].$$

L'intégrale généralisée placée à gauche étant convergente, il en va de même pour celle du milieu.

P.3. On considère la fonction $\varphi : [1, +\infty[\to]0,1]$ qui à u associe $t = \varphi(u) = 1/u$.

P.3.a. Calculer $\varphi(1)$, $\varphi'(u)$ ainsi que la limite de $\varphi(u)$ lorsque u tend vers $+\infty$. Expliquer pourquoi la fonction φ est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$. On admet que la fonction φ détermine un *changement de variables.* Quelle est la fonction réciproque $\varphi^{-1}(t)$ de φ ?

$$\varphi(1) = 1, \qquad \varphi'(u) = -\frac{1}{u^2} < 0, \qquad \lim_{u \to +\infty} \varphi(u) = 0.$$

La dérivée de φ *étant strictement négative sur* $[1, +\infty[$*, la fonction* φ *est strictement décroissante sur cet intervalle. Elle est bijective d'inverse* $\varphi^{-1}(t) = 1/t$*.*

P.3.b. On fixe $x \in]0,1]$. A l'aide du changement de variables $t = \varphi(u)$, justifier l'identité

$$\int_x^1 \frac{\ln t}{1+t^2} \, dt = -\int_1^{1/x} \frac{\ln u}{1+u^2} \, du.$$

Pour $t = x$*, on a* $u = \varphi^{-1}(x) = 1/x$*. Pour* $t = 1$*, on a* $u = \varphi^{-1}(1) = 1$*. Par ailleurs,* $dt = \varphi'(u)\, du$*. Ainsi*

$$\int_x^1 \frac{\ln t}{1+t^2} \, dt = \int_{1/x}^1 \frac{\ln(1/u)}{1+(1/u)^2} \, \frac{-du}{u^2} = \int_{1/x}^1 \frac{\ln u}{1+u^2} \, du = -\int_1^{1/x} \frac{\ln u}{1+u^2} \, du.$$

P.3.c. En s'aidant des questions P.2.c et P.3.b, montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} \, dt$ est convergente.
Il s'agit de prouver que la limite $\displaystyle\lim_{y \to +\infty} \int_1^y \frac{\ln t}{1+t^2} \, dt$ *existe et est finie. On pose* $y = 1/x$ *de sorte que* x *tend vers* 0*. Avec les questions P.3.b puis P.2.c, on a*

$$\lim_{y \to +\infty} \int_1^y \frac{\ln t}{1+t^2} \, dt = \lim_{x \to 0+} \int_1^{1/x} \frac{\ln t}{1+t^2} \, dt = -\lim_{x \to 0+} \int_x^1 \frac{\ln t}{1+t^2} \, dt = -\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2} \, dt.$$

P.3.d. Expliquer pourquoi l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt$ est convergente et vaut 0.

Il y a deux points incertains en 0 et en $+\infty$. Dans ce cas, on sépare l'intégrale généralisée en deux. On étudie séparément

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt \qquad \text{et} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt.$$

D'après les questions P.2.c et P.3.c. ces deux intégrales généralisées sont convergentes. Il en va donc de même pour $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt$ *et*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt = \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt + \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt = \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt - \int_0^1 \frac{\ln t}{1+t^2}\,dt = 0.$$

P.4. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on considère l'intégrale généralisée $G(x) := \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{x^2+t^2}\,dt$.

P.4.a. En minorant puis en majorant convenablement la fonction $\ln t/(x^2+t^2)$ respectivement sur les intervalles $]0,1]$ et $[1,+\infty[$, montrer que l'intégrale généralisée $G(x)$ est convergente.

Il y a deux points incertains en 0 et en $+\infty$. Dans ce cas, on sépare l'intégrale généralisée en deux. On étudie séparément

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{x^2+t^2}\,dt \qquad \text{et} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{x^2+t^2}.$$

Pour la première intégrale, on peut exploiter l'encadrement

$$\frac{1}{x^2}\,\ln t \le \frac{\ln t}{x^2+t^2} \le 0, \qquad \forall\, t \in]0,1].$$

Pour la seconde intégrale, on peut exploiter l'encadrement

$$0 \le \frac{\ln t}{x^2+t^2} \le 2\,\frac{\ln t}{1+t^2}, \qquad \forall\, t \in [1,+\infty[.$$

On a ainsi une minoration et une majoration par des intégrales qui (d'après P.2.b et P.3.c) sont convergentes ce qui permet de conclure.

P.4.b. Exploiter le changement de variables $t = xv$ pour prouver que $G(x) = \frac{\pi}{2x}\,\ln x$.

Pour $t = 0$, on a $v = 0$. Pour $t = +\infty$, on a $v = +\infty$. Ainsi

$$G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(xv)}{x^2+(xv)^2}\,x\,dv = \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \frac{\ln x + \ln v}{1+v^2}\,dv.$$

Cela se simplifie d'après la P.3.d. Il reste

$$G(x) = \frac{\ln x}{x}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+v^2}\,dv = \frac{\ln x}{x}\,[\arctan v]_0^{+\infty} = \frac{\ln x}{x}\Big(\lim_{v\to+\infty} \arctan v - \arctan 0\Big) = \frac{\pi}{2x}\,\ln x.$$