DS2 (le 14 mars)

Durée 45 minutes, calculatrices et documents interdits

Exercice 1. Donner (sans justification) une primitive F des fonctions f suivantes :

$f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ $F(x) =$

$f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ $F(x) =$

Exercice 2. L'objectif de cet exercice est de tester la compréhension du cours sur l'intégration des fonctions trigonométriques. On considère la fonction $f(x) = (\cos x)^2\,(\sin x)^3$.

1. Ecrire $f(x)$ sous la forme de $\sin x$ fois un polynôme P en $\cos x$.

   $f(x) = \sin x\ P(\cos x), \qquad P(X) =$

2. Reconnaître la dérivée d'une fonction composée et en déduire une primitive F de f.

   $F(x) =$

Exercice 3. On effectue le changement de variables $t = \varphi(x) = x^2$.

1. Calculer

   $\varphi^{-1}(1) =$ $\varphi^{-1}(4) =$ $\varphi'(x) =$

2. En déduire

   $\displaystyle\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,dt =$

Exercice 4. On s'intéresse à la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x\,(x+1)}$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que

$$\forall x \in [1,2]\,, \qquad f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}, \qquad\qquad a = \qquad\qquad b =$$

2. Déduire de la question précédente la valeur de l'intégrale

$$\int_1^2 \frac{1}{x\,(x+1)}\,dx =$$

3. A l'aide d'une intégration par parties, calculer la valeur de l'intégrale

$$\int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2}\,dt =$$

Exercice 5. Le changement de variables $u = \cos t$ permet d'obtenir :

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{\sin t}\,dt = \int_0^{1/2} \frac{1}{1-u^2}\,du.$$

1. Expliquer soigneusement ci-dessous pourquoi on a cette égalité.

2. En s'inspirant de la méthode de l'exercice 4, calculer :

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{\sin t}\,dt =$$