DS2 (correction)

Exercice 1. Donner (sans justification) une primitive F des fonctions f suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{x^2+1} \qquad F(x) = \arctan x$$

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1} \qquad F(x) = \frac{1}{2}\ \ln(x^2+1)$$

Exercice 2. L'objectif de cet exercice est de tester la compréhension du cours sur l'intégration des fonctions trigonométriques. On considère la fonction $f(x) = (\cos x)^2\,(\sin x)^3$.

1. Ecrire $f(x)$ sous la forme de $\sin x$ fois un polynôme P en $\cos x$.

   $f(x) = \sin x\ P(\cos x), \qquad P(X) = X^2 - X^4$

2. Reconnaître la dérivée d'une fonction composée et en déduire une primitive F de f.

   $$F(x) = \frac{1}{4}\ \cos^4 x - \frac{1}{3}\ \cos^3 x$$

Exercice 3. On effectue le changement de variables $t = \varphi(x) = x^2$.

1. Calculer

   $\varphi^{-1}(1) = 1 \qquad \varphi^{-1}(4) = 2 \qquad \varphi'(x) = 2x$

2. En déduire

   $$\int_1^4 \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\ dt = \int_1^2 \frac{1-x}{x}\ (2x\,dx) = \int_1^2 (2-2x)\,dx) = \Big[2x - x^2\Big]_1^2 = -1$$

Exercice 4. On s'intéresse à la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x\,(x+1)}$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que

$$\forall x \in [1,2]\,, \qquad f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}, \qquad\qquad a = 1 \qquad\qquad b = -1$$

2. Déduire de la question précédente la valeur de l'intégrale

$$\int_1^2 \frac{1}{x\,(x+1)}\,dx = \Big[\ln x\Big]_1^2 - \Big[\ln(x+1)\Big]_1^2 = 2\,\ln 2 - \ln 3$$

3. A l'aide d'une intégration par parties, calculer la valeur de l'intégrale

$$\int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2}\,dt = \Big[-\frac{1}{t}\,\ln(1+t)\Big]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{t\,(t+1)}\,dt = 3\,\ln 2 - \frac{3}{2}\,\ln 3$$

Exercice 5. Le changement de variables $u = \cos t$ permet d'obtenir :

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{\sin t}\,dt = \int_0^{1/2} \frac{1}{1-u^2}\,du.$$

1. Expliquer soigneusement ci-dessous pourquoi on a cette égalité.

On a $\cos(\pi/3) = 1/2$ *et* $\cos(\pi/2) = 0$. *Par ailleurs*

$$du = -\sin t\,dt, \qquad \frac{1}{\sin t}\,dt = \frac{1}{\sin^2 t}\,(\sin t\,dt) = \frac{1}{1-u^2}\,(-du).$$

Ainsi

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{\sin t}\,dt = \int_{1/2}^{0} \frac{1}{1-u^2}\,(-du) = \int_0^{1/2} \frac{1}{1-u^2}\,du.$$

2. En s'inspirant de la méthode de l'exercice 4, calculer :

$$\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1}{\sin t}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{1/2}\Big(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\Big)\,du = \frac{1}{2}\,\Big[-\ln(1-u) + \ln(1+u)\Big]_0^{1/2} = \ln\sqrt{3}$$