Correction du CC1 (7 février 2023)

Durée 45 minutes, calculatrices et documents interdits

Exercice 1. 1. $\mathcal{A} = \pi \times 4^2/4 = 4\pi$
2. Il s'agit d'un demi-carré de côté 2 donc d'aire $\mathcal{A} = 4/2 = 2$
3. Il s'agit d'un triangle dont la base est de longueur 2 et la hauteur $2\sin(60°) = \sqrt{3}$ donc d'aire $2\sqrt{3}/2 = \sqrt{3}$.

Exercice 2. 1. Par la relation entre intégrales et primitives, on a $G(x) = F(x^2) - F(0)$ (remarquons que G est définie sur $\mathbb{R}$ mais F seulement sur $\mathbb{R}_+$).
2. Dérivons : $G'(x) = 2xF'(x^2) = 2xe^{-\sqrt{x^2}} = 2xe^{-x}$ car $x \geq 0$
3. Dérivons la fonction $H \colon x \mapsto -(2x+2)e^{-x}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$H'(x) = -2e^{-x} + (2x+2)e^{-x} = 2xe^{-x}$$

Ainsi G et H ont la même dérivée sur $\mathbb{R}_+$, c'est-à-dire $(G-H)' = 0$ sur cet intervalle. La fonction $G - H$ est donc constante sur $\mathbb{R}_+$. La valeur de cette constante qu'on note C vérifie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$G(x) = C + H(x) = C - (2x+2)e^{-x}$$

4. D'une part, on a $G(0) = \displaystyle\int_0^0 e^{-\sqrt{t}}\mathrm{d}t = 0$. D'autre part, $G(0) = C - (2 \times 0 + 2)e^0 = C - 2$. On en déduit $C = 2$.
On remarque que $G(x)$ ne dépend que de x^2, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$: $G(x) = G(-x) = G(|x|)$. On peut alors remplacer G par son expression obtenue question 3 car $|x| \in \mathbb{R}_+$, d'où finalement :

$$G(x) = 2 - (2|x|+2)e^{-|x|} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Exercice 3. 1. Notons que 1 carreau représente $0,25$ unités d'aire. On compte 28 demi-carreaux complètement hachurés, et 60 demi-carreaux au moins partiellement hachurés. Ainsi $\mathcal{A}$ est comprise entre $28/8$ et $60/8$ soit entre $3,5$ et $7,5$ unités.
2. $F(x) = \dfrac{11x}{2} + \dfrac{18}{x-10} + \text{cste}$ et $G(x) = 32\ln(x) - 3x + \text{cste}$
3. On a :

$$\mathcal{A} = \int_4^8 f(t)\mathrm{d}t - \int_4^8 g(t)\mathrm{d}t = F(8) - F(4) - G(8) + G(4)$$

En effet, sur l'intervalle $[4,8]$, la première intégrale représente l'aire entre la courbe de f et l'axe des abscisses et la seconde l'aire entre la courbe de g et l'axe des abscisses. L'aire hachurée est exactement la différence entre ces deux aires. On utilise la relation intégrales-primitives pour faire apparaître F et G.
4. On a :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{88}{2} + \frac{18}{-2} - \frac{44}{2} - \frac{18}{-6} - 32\ln(8) + 24 + 32\ln(4) - 12 \\ &= 28 - 32\ln(2) \qquad \text{(ce qui fait environ } 5,8 \text{ unités)}\end{aligned}$$