Corrigé du DS1 (07 février)

Exercice 1. On considère la fonction $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ qui à t associe e^t.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Décrire la subdivision de $[-1,1]$ en n sous-intervalles de mêmes longueurs.

$$[-1,1] = \bigcup_{k=0}^{n-1} \Big[-1 + \frac{2k}{n}, -1 + \frac{2(k+1)}{n}\Big].$$

L'intervalle $[-1,1]$ étant de longueur 2, les sous-intervalles sont de longueurs $2/n$. Ne pas oublier le facteur 2 !

2. Ecrire puis calculer la somme de Riemann $\mathcal{R}_n$ (impliquant la valeur de f à l'extrémité gauche des sous-intervalles) associée à la fonction f et à la subdivision obtenue ci-dessus.

$$\mathcal{R}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{n} f\Big(-1 + \frac{2k}{n}\Big) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{n} e^{-1+(2k/n)} = \frac{2}{en} \sum_{k=0}^{n-1} (e^{2/n})^k.$$

On reconnait la somme partielle d'une séries géométrique de raison $e^{2/n}$. Ainsi :

$$\mathcal{R}_n = \frac{2}{en} \frac{(e^{2/n})^n - 1}{e^{2/n} - 1} = \frac{e^2 - 1}{e} \frac{2/n}{e^{2/n} - 1}.$$

3. On rappelle que

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = (e^x)'_{|x=0} = 1.$$

En déduire par un passage à la limite (à justifier) la valeur de l'intégrale

Comme $x_n := 2/n$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, on peut utiliser l'indication fournie ci-dessus pour récupérer

$$\int_{-1}^{1} e^t \, dt = \lim_{n \to +\infty} \mathcal{R}_n = \frac{e^2 - 1}{e}.$$

4. Retrouver ce résultat en utilisant une primitive.

La primitive de e^t n'est autre que e^t. Par conséquent :

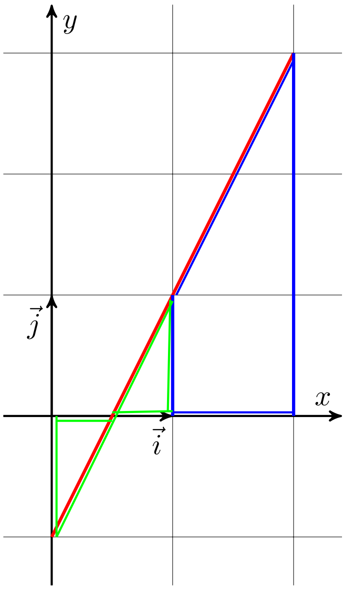
$$\int_{-1}^{1} e^t \, dt = [e^t]_{-1}^{1} = e^1 - e^{-1} = \frac{e^2 - 1}{e}.$$

T.S.V.P. $\Longrightarrow$

Exercice 2. On s'intéresse à la fonction $g(t) = 2t - 1$, dont on souhaite calculer de deux façons différentes l'intégrale entre 0 et 2, notée

$$A := \int_0^2 (2t - 1)\, dt.$$

1. Faire ci-dessous un dessin du graphe de g sur $[0, 2]$. Identifier (en la hachurant) une surface dont l'aire correspond au nombre A (penser à tenir compte des signes dans l'intégrale pour éliminer deux triangles par compensation). En déduire (à l'aide de calcul d'aires de figures géométriques simples) la valeur de A.



Le graphe est tracé en rouge. Le nombre A est donné par l'aire algébrique située sous le graphe de g. Le triangle situé à gauche du point $(1/2, 0)$ est compté avec le signe $-$. Celui situé à droite du point $(1/2, 0)$ et limité par la droite d'équation $x = 1$ est compté avec le signe $+$. Ils ont la même aire. Leurs contributions se compensent donc.

Le nombre A correspond donc à l'aire limitée en bleu. C'est donc l'aire (égale à 1) d'un carré de côté 1 plus l'aire (égale à 1) d'un triangle de base 1 et de hauteur 2. Ainsi $A = 2$.

2. Déterminer la primitive G de g qui vaut 0 en 0. $G(t) = t^2 - t$

3. En déduire par une autre méthode la valeur de A en complétant la formule ci-dessous :

$$\int_0^2 (2t - 1)dt = \Big[G\Big]_0^2 = G(2) - G(0) = (2^2 - 2) - (0^2 - 0) = 4 - 2 = 2.$$