UNIVERSITÉ RENNES 2

Algèbre IV pour MIASHS - DM

Corrigé du devoir à la maison
à rendre au plus tard le 27/04/2020

Nom : **Prénom :**

Problème

On se donne $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, et on considère la matrice symétrique $S := \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \alpha \end{pmatrix}$.

Partie I. Dans cette partie, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire usuel.

I.1. Que peut-on dire de S ? Comment peut-on simplifier S dans une base orthonormée bien choisie ? On demande de répéter ci-dessous le contenu du théorème du cours utilisé.

La matrice S est symétrique. Par conséquent (cours) , il existe une matrice orthogonale $\Omega \in O_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in D_n(\mathbb{R})$ telles que $S = \Omega D \Omega^{-1}$.

I.2. Que peut-on dire *a priori* sur les valeurs propres de S ?

Les valeurs propres de S sont *réelles.*

I.3. Calculer le polynôme caractéristique $P(\lambda)$ de S.

$$P(\lambda) = (\alpha + 2\beta - \lambda)(\alpha - \beta - \lambda)^2.$$

On ne change pas la valeur du déterminant en ajoutant à la première colonne la somme des deux dernières colonnes :

$$P(\lambda) = det(S - \lambda Id) = \begin{vmatrix} \alpha - \lambda + 2\beta & \beta & \beta \\ \alpha - \lambda + 2\beta & \alpha - \lambda & \beta \\ \alpha - \lambda + 2\beta & \beta & \alpha - \lambda \end{vmatrix} = (\alpha - \lambda + 2\beta) \begin{vmatrix} 1 & \beta & \beta \\ 1 & \alpha - \lambda & \beta \\ 1 & \beta & \alpha - \lambda \end{vmatrix}.$$

On ne change pas la valeur du déterminant en retranchant β fois la première colonne à chacune des deux dernières colonnes ce qui donne :

$$P(\lambda) = (\alpha - \lambda + 2\beta) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha - \lambda - \beta & 0 \\ 1 & 0 & \alpha - \lambda - \beta \end{vmatrix} = (\alpha - \lambda + 2\beta)(\alpha - \lambda - \beta)^2.$$

I.4. On admet que la matrice S admet deux valeurs propres distinctes notées λ_1 et λ_2 qui sont telles que $\lambda_1 > \lambda_2$. Déterminer (en fonction de α et de β) les valeurs de λ_1 et λ_2, ainsi que les multiplicités de ces valeurs propres.

Les valeurs propres de S sont les racines du polynôme $P(\cdot)$, et leurs multiplicités sont les exposants des monômes correspondants. Comme β est positif, on a :

$\lambda_1 = \alpha + 2\beta$ *de multiplicité* 1,

$\lambda_2 = \alpha - \beta$ *de multiplicité* 2,

qui sont les seuls choix compatibles avec la condition $\lambda_1 > \lambda_2$.

I.5. Trouver le vecteur propre normalisé f_1 de S qui est associé à la valeur propre λ_1 et dont la première composante est positive.

$$f_1 = \tfrac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

I.6. Trouver les deux vecteurs propres normalisés f_2 et f_3 de S qui sont tous deux associés à la valeur propre λ_2, qui sont compatibles avec le contenu (partiellement complété) des vecteurs colonnes ci-dessous, et qui sont orthogonaux (pour le produit scalaire usuel).

$$f_2 = \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \end{pmatrix}, \qquad\qquad f_3 = \quad \begin{pmatrix} -1 \\ \\ \end{pmatrix}.$$

On peut toujours chercher ces vecteurs sous la forme :

$$f_j = \tfrac{1}{\sqrt{1+a^2+b^2}} \begin{pmatrix} -1 \\ a \\ b \end{pmatrix}.$$

Un tel vecteur f_j est vecteur propre de S pour la valeur propre λ_2 si et seulement si :

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \alpha \end{pmatrix} f_j = (\alpha - \beta)\, f_j.$$

Cette condition fournit le système :

$$\begin{cases} \beta(a+b-1) = 0, \\ -\beta + \beta b + \beta a = 0, \\ -\beta + \beta a + \beta b = 0. \end{cases}$$

Il faut et il suffit d'avoir $a + b = 1$. Dès lors, pour :

$$f_2 = \frac{1}{\sqrt{2+2a^2-2a}} \begin{pmatrix} -1 \\ a \\ 1-a \end{pmatrix}, \qquad\qquad f_3 = \frac{1}{\sqrt{2+2\tilde{a}^2-2\tilde{a}}} \begin{pmatrix} -1 \\ \tilde{a} \\ 1-\tilde{a} \end{pmatrix},$$

la condition d'orthogonalité de f_2 et f_3 fournit :

$$2 + 2a\tilde{a} - a - \tilde{a} = 0.$$

La valeur $a = 1$ est imposée donnant accès à $\tilde{a} = -1$ de sorte que :

$$f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad f_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

I.7. Déterminer une matrice Ω orthogonale permettant de diagonaliser S en une matrice diagonale dont les valeurs propres situées en position (i, i) pour i variant de 1 à 3 sont classées par ordre décroissant.

La valeur propre en position $(1, 1)$ doit être λ_1 puisque $\lambda_1 > \lambda_2$ ce qui oblige à ranger f_1 en première colonne. Puis on peut ranger f_2 et f_3 dans n'importe quel ordre. Par exemple, on peut prendre :

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & +1//\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}.$$

Partie II. Tout vecteur u de $\mathbb{R}^3$ s'écrit $u = {}^t(x, y, z) = \tilde{x}f_1 + \tilde{y}f_2 + \tilde{z}f_3$. Dans cette partie, $\mathbb{R}^3$ est muni de la forme bilinéaire symétrique $\varphi(u, u) = {}^t uSu$ induite par S.

II.1. Déterminer la forme quadratique $q(\cdot)$ associée à la matrice S dans la base canonique.

On obtient :

$$q(u) \equiv q(x, y, z) = \alpha x^2 + \alpha y^2 + \alpha z^2 + 2\beta xy + 2\beta xz + 2\beta yz.$$

II.2. Déterminer l'expression de la forme quadratique $q(\cdot)$ dans la base (f_1, f_2, f_3).

La nouvelle matrice s'obtient en calculant ${}^t\Omega S\Omega = D$ ce qui donne :

$$q(u) \equiv q(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = (\alpha + 2\beta)\tilde{x}^2 + (\alpha - \beta)\tilde{y}^2 + (\alpha - \beta)\tilde{z}^2.$$

II.3. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur α et β pour que la forme quadratique $q(\cdot)$ soit dégénérée.

Il faut que l'une ou l'autre des deux valeurs propres soit nulle, ce qui équivaut à $\alpha = \beta$ ou $\alpha = -2\beta$.

II.4. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur α et β pour que la forme quadratique q soit définie positive. **On suppose désormais q définie positive**.

Il faut que les deux valeurs propres soient strictement positives, ce qui équivaut à $\alpha > \beta$.

II.5. Montrer qu'on peut trouver une base $(\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3)$ de $\mathbb{R}^3$ qui est orthonormée pour φ et telle que $\tilde{f}_j = \gamma_j f_j$ avec $\gamma_j \in \mathbb{R}_+^*$ pour tout $j \in \{1, 2, 3\}$. Déterminer les γ_j.

$\gamma_1 =$ $\qquad$ $\gamma_2 =$ $\qquad$ $\gamma_3 =$

D'abord, des vecteurs $\tilde{f}_j$ choisis comme indiqué sont deux à deux orthogonaux puisque :

$$\forall\, i \neq j, \quad \varphi(\tilde{f}_i, \tilde{f}_j) = {}^t\tilde{f}_i S \tilde{f}_j = \gamma_i\gamma_j\, {}^t f_i S f_j = \gamma_i\gamma_j\, \lambda_j f_i \cdot f_j = 0.$$

Ensuite, pour déterminer les γ_j, il faut normaliser les f_j pour φ (ou q) ce qui impose :

$$1 = q(\tilde{f}_j) = \gamma_j^2\, q(f_j) = \gamma_j^2\, {}^t f_j S f_j = \gamma_j^2\, \lambda_j.$$

Par conséquent :

$$\gamma_1 = (\alpha + 2\beta)^{-1/2}, \qquad \gamma_2 = (\alpha - \beta)^{-1/2}, \qquad \gamma_3 = (\alpha - \beta)^{-1/2}.$$

II.6. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On considère la droite $\mathcal{D}$ engendrée par le vecteur $\check{u} = {}^t(a, b, c)$, c'est-à-dire d'équation $\mathcal{D} := \{(as, bs, cs); s \in \mathbb{R}\}$. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $\check{u}$ pour que les plans orthogonaux à $\mathcal{D}$ pour φ et pour le produit scalaire euclidien coïncident.

Les plans orthogonaux $\mathcal{P}_\varphi$ et $\mathcal{P}$ à $\mathcal{D}$ pour respectivement φ et le produit scalaire euclidien sont déterminés par :

$$\mathcal{P}_\varphi := \{v \in \mathbb{R}^3\,;\, \varphi(v, \check{u}) = {}^t v S \check{u} = 0\,\}, \qquad \mathcal{P} := \{v \in \mathbb{R}^3\,;\, {}^t v \check{u} = 0\,\}.$$

Ces deux plans coïncident si et seulement si les vecteurs $S\check{u}$ et $\check{u}$ sont colinéaires, c'est-à-dire si $\check{u}$ est vecteur propre de S. Dans la pratique, il faut et il suffit que $\check{u}$ soit colinéaire à f_1 ou qu'il soit dans le plan engendré par f_2 et f_3.

II.7. Ecrire dans la base canonique la matrice P de la projection orthogonale (pour φ) de $\mathbb{R}^3$ sur la droite $D := \{(-s, 0, s); s \in \mathbb{R}\}$.

On travaille ici avec $\check{u} = {}^t(-1, 0, 1)/\sqrt{2} = (f_2 + \sqrt{3} f_3)/2$. D'après ce qui précède P_φ et P coïncident de sorte que les projections orthogonales de $\mathbb{R}^3$ sur la droite D pour φ et le produit scalaire euclidien coïncident. Comme $\check{u}$ est de norme euclidienne égale à 1, on a $P\vec{u} = (\vec{u} \cdot \check{u})\check{u}$ d'où l'on déduit :

$$P = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} {}^t(-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'autres raisonnements sont possibles pour aboutir à ce résultat.