UNIVERSITÉ RENNES 2

**Algèbre IV pour MIASHS - DM**

---

Devoir à la maison

à rendre au plus tard le 27/04/2020

---

**Nom :** **Prénom :**

---

## Problème

On se donne $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la matrice symétrique :

$$S := \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \beta \\ \beta & \alpha & \beta \\ \beta & \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

**2.1.** Que peut-on dire de $S$ ? Comment peut-on simplifier $S$ dans une base orthonormée bien choisie ? On demande de répéter ci-dessous le contenu du théorème du cours utilisé.

**2.2.** Que peut-on dire *a priori* sur les valeurs propres de $S$ ?

Les valeurs propres de $S$ sont

**2.3.** Calculer le polynôme caractéristique $P(\lambda)$ de $S$.

$P(\lambda) =$

**2.4.** On admet que la matrice $S$ admet deux valeurs propres distinctes notées $\lambda_1$ et $\lambda_2$ qui sont telles que $\lambda_1 > \lambda_2$. Déterminer (en fonction de $\alpha$ et de $\beta$) les valeurs de $\lambda_1$ et $\lambda_2$, ainsi que les multiplicités de ces valeurs propres.

$\lambda_1 =$ de multiplicité

$\lambda_2 =$ de multiplicité

**2.5.** Trouver le vecteur propre normalisé $f_1$ de $S$ qui est associé à la valeur propre $\lambda_1$ et dont la première composante est positive.

$$f_1 = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}.$$

**2.6.** Trouver les deux vecteurs propres normalisés $f_2$ et $f_3$ de $S$ qui sont tous deux associés à la valeur propre $\lambda_2$, qui sont compatibles avec le contenu (partiellement complété) des vecteurs colonnes ci-dessous, et qui sont deux à deux orthogonaux.

$$f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \phantom{-1} \end{pmatrix}, \qquad f_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ \phantom{-1} \\ \phantom{-1} \end{pmatrix}.$$

**2.7.** Déterminer une matrice $\Omega$ orthogonale permettant de diagonaliser $S$ en une matrice diagonale dont les valeurs propres situées en position $(i, i)$ pour $i$ variant de 1 à 3 sont classées par ordre décroissant.

$$\Omega = \left(\begin{array}{c|c|c} \qquad & \qquad & \qquad \\ \hdashline \qquad & \qquad & \qquad \\ \hdashline \qquad & \qquad & \qquad \end{array}\right)$$

**2.8.** Déterminer la forme quadratique $q(\cdot)$ associée à la matrice $S$ dans la base canonique.

$q(x, y, z) =$

**2.9.** Déterminer l'expression de la forme quadratique $q(\cdot)$ dans la base $(f_1, f_2, f_3)$.

$q(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) =$

**2.10.** Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $\alpha$ et $\beta$ pour que $q(\cdot)$ soit définie positive.

**2.11.** Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $\alpha$ et $\beta$ pour que la forme quadratique $q(\cdot)$ soit dégénérée.

**2.12.** On suppose désormais que la forme quadratique $q(\cdot)$ est définie positive, de forme bilinéaire symétrique associée $\varphi(\cdot, \cdot)$. On considère la droite $\mathcal{D} := \{(-s, 0, s); s \in \mathbb{R}\}$. Caractériser l'orthogonale $\mathcal{P}$ de $\mathcal{D}$ pour $\varphi$.

$\mathcal{P} = \{\, ( \qquad , \qquad , \qquad ) \,;\, (r, s) \in \mathbb{R}^2 \,\}.$

**2.13.** Ecrire dans la base $(f_1, f_2, f_3)$ la matrice $P$ de la projection orthogonale (pour $\varphi$ ) de $\mathbb{R}^3$ sur $D$.

$$P = \left(\begin{array}{c|c|c} \qquad & \qquad & \qquad \\ \hdashline \qquad & \qquad & \qquad \\ \hdashline \qquad & \qquad & \qquad \end{array}\right)$$