UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Distribution et ANalyse de Fourier

DM à rendre pour le 23/05/2020

Problème. Etant donné $d \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $C_c^0(\mathbb{R}^d) \equiv C_c^0(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ qui sont continues, à valeurs complexes et à support compact. Comme à l'usuel, l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \equiv C_c^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{C})$ regroupe l'ensemble des fonctions qui sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d$, à valeurs complexes et à support compact.

I. Dans cette question I, on fixe $\psi \in C_c^0(\mathbb{R})$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

I. Expliquer pourquoi, pour tout $(x,\xi) \in \mathbb{R}^2$, l'expression :

$$W_\varepsilon[\psi](x,\xi) := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \psi\Big(x+\frac{1}{2}\varepsilon y\Big)\,\overline{\psi\Big(x-\frac{1}{2}\varepsilon y\Big)}\,e^{-i\xi y}\,dy$$

est bien définie, et est un nombre réel.

Par hypothèse, le support de ψ est compact, contenu dans $[-R,R]$ pour un certain $R \in \mathbb{R}_+^*$. Il s'ensuit que le support de la fonction $g_\varepsilon(x,\xi,\cdot)$ définie par :

$$y \mapsto g_\varepsilon(x,\xi,y) := \psi\Big(x+\frac{1}{2}\varepsilon y\Big)\,\overline{\psi\Big(x-\frac{1}{2}\varepsilon y\Big)}\,e^{-i\xi y}$$

est compact, contenu dans l'intervalle :

$$J_\varepsilon(R) := \big[-2\,\varepsilon^{-1}\,R\,;\,2\,\varepsilon^{-1}\,R\big].$$

L'intégrale d'une fonction continue à support compact est bien définie (au sens de Riemann ou de Lebesgue). Par ailleurs, le changement de variables y en $-y$ conduit à :

$$\overline{W_\varepsilon[\psi](x,\xi)} := \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \overline{\psi\Big(x+\frac{1}{2}\varepsilon y\Big)}\,\psi\Big(x-\frac{1}{2}\varepsilon y\Big)\,e^{i\xi y}\,dy = W_\varepsilon[\psi](x,\xi),$$

ce qui indique que la fonction $W_\varepsilon[\psi](\cdot)$ est à valeurs réelles.

I.2. Montrer que $W_\varepsilon[\psi](\cdot)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.

La fonction $g_\varepsilon(\cdot)$ est continue sur le compact :

$$K = [x-1,x+1]\times[\xi-1,\xi+1]\times J_\varepsilon(R).$$

Elle est donc uniformément continue sur K (d'après le théorème de Heine). En particulier, pour tout $\eta > 0$, il existe $\delta \equiv \delta(\eta) \in]0,1]$ tel que :

$$(\tilde{x},\tilde{\xi},y) \in K, \quad \parallel(\tilde{x},\tilde{\xi})-(x,\xi)\parallel \le \delta(\eta) \quad \Longrightarrow \quad |g_\varepsilon(\tilde{x},\tilde{\xi},y)-g_\varepsilon(x,\xi,y)| \le \eta.$$

Par conséquent, pour tout $(\tilde{x},\tilde{\xi}) \in [x-1,x+1]\times[\xi-1,\xi+1]$*, on a :*

$$\| (\tilde{x},\tilde{\xi}) - (x,\xi) \| \leq \delta(\eta) \quad \Longrightarrow \quad |W_\varepsilon[\psi](\tilde{x},\tilde{\xi}) - W_\varepsilon[\psi](x,\xi)| \leq \frac{2R}{\pi\varepsilon}\,\eta.$$

Le membre de droite peut être rendu aussi petit que souhaité (en ajustant η*), ce qui garantit la continuité de* $W_\varepsilon[\psi](\cdot)$ *au point* (x,ξ)*. Comme le point* (x,ξ) *a été choisi de façon arbitraire, cela donne la continuité de* $W_\varepsilon[\psi](\cdot)$ *sur* $\mathbb{R}^2$*.*

I.3. Etablir l'inégalité :

$$\| W_\varepsilon[\psi] \|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq \frac{1}{\varepsilon\pi} \| \psi \|^2_{L^2(\mathbb{R})} .$$

En changeant y *en* $z=\varepsilon y/2$*, on obtient :*

$$|W_\varepsilon[\psi](x,\xi)| \leq \frac{1}{\varepsilon\pi}\int_{\mathbb{R}} |\psi(x+z)|\,|\psi(x-z)|\ dz.$$

Puis on utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} |W_\varepsilon[\psi](x,\xi)| &\leq \frac{1}{\varepsilon\pi}\int_{\mathbb{R}} |\psi(x+z)|\,|\psi(x-z)|\ dz \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon\pi} \| \psi(x+\cdot) \|_{L^2(\mathbb{R})} \| \psi(x-\cdot) \|_{L^2(\mathbb{R})} = \frac{1}{\varepsilon\pi} \| \psi \|^2_{L^2(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

I.4. Soit maintenant $\tilde{\psi} \in C^0_c(\mathbb{R})$. Etablir l'inégalité :

$$\| W_\varepsilon[\psi] - W_\varepsilon[\tilde{\psi}] \|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq \frac{1}{\varepsilon\pi}(\| \psi \|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \| \tilde{\psi} \|^2_{L^2(\mathbb{R})})\ \| \psi - \tilde{\psi} \|_{L^2(\mathbb{R})} .$$

En changeant y *en* $z=\varepsilon y/2$*, on obtient :*

$$\begin{aligned} |W_\varepsilon[\psi](x,\xi) - W_\varepsilon[\tilde{\psi}](x,\xi)| &\leq \frac{1}{\varepsilon\pi}\int_{\mathbb{R}} |\psi(x+z)\overline{\psi(x-z)} - \tilde{\psi}(x+z)\overline{\tilde{\psi}(x-z)}|\ dz. \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon\pi}\int_{\mathbb{R}} |[\psi(x+z) - \tilde{\psi}(x+z)]\overline{\psi(x-z)}\ dz \\ &\quad + \frac{1}{\varepsilon\pi}\int_{\mathbb{R}} |\tilde{\psi}(x+z)[\overline{\psi(x-z)} - \overline{\tilde{\psi}(x-z)}]\ dz. \end{aligned}$$

Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour conclure.

II. Soit maintenant $\psi \in L^2(\mathbb{R})$. Montrer qu'on peut encore donner un sens à $W_\varepsilon[\psi](\cdot)$ sous la forme d'une fonction continue et bornée.

Attention : l'application qui à ψ *associe* $W_\varepsilon[\psi]$ *n'est pas linéaire. Elle est quadratique. C'est pourquoi on ne peut pas utiliser l'argument habituel d'extension par densité des applications linéaires uniformément continues. Il faut refaire les choses à la main en s'appuyant sur la question I.4.*

Comme $C_c^0(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$, on peut trouver une suite $(\psi_n)_n \in C_c^0(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ qui converge vers ψ pour la norme $L^2(\mathbb{R})$. En particulier :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+^*; \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \parallel \psi_n \parallel_{L^2(\mathbb{R})} \leq M.$$

D'après la question I.4, on a alors :

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^2, \quad \parallel W_\varepsilon[\psi_p] - W_\varepsilon[\psi_q] \parallel_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq \frac{2M}{\varepsilon\pi} \parallel \psi_p - \psi_q \parallel_{L^2(\mathbb{R})}^2 .$$

Cette estimation implique que la suite $\big(W_\varepsilon[\psi_n]\big)_n$ est une suite de Cauchy dans l'espace de Banach $C_b^0(\mathbb{R}^2)$ (ensemble des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}^2$) muni de la norme uniforme (on rappelle que toute limite uniforme de fonctions continues uniformément bornées est continue et bornée). Elle converge donc vers un élément de $C^0(\mathbb{R}^2)$ qu'on peut noter $W_\varepsilon[\psi]$. L'argument utilisé ci-dessus montre facilement que cette limite $W_\varepsilon[\psi]$ ne dépend pas du choix de la suite $(\psi_n)_n$ sélectionnée.

III. On se donne $\rho \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ et $u \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$. On considère l'application :

$$\begin{aligned} S \equiv S(\rho,u) \,:\, \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{C} \\ \varphi \quad &\longmapsto \quad S(\varphi) := \int_{\mathbb{R}} \rho(x)\, \varphi\big(x,u(x)\big)\; dx. \end{aligned}$$

III.1. Montrer que S est une distribution d'ordre zéro. A-t'on $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$?

L'application S est clairement une forme linéaire. Pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^2$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ à support compact contenu dans K, on a :

$$|S(\varphi)| \leq \parallel \rho \parallel_{L^1(\mathbb{R})} \mathcal{N}_0(\varphi), \quad \mathcal{N}_0(\varphi) := \sup_{(x,\xi)\in K} |\varphi(x,\xi)|\,.$$

Donc $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ est d'ordre zéro.

III.2. Montrer que le support de S est contenu dans une courbe de $\mathbb{R}^2$ que l'on demande de déterminer.

On note $\mathscr{C}$ la courbe de $\mathbb{R}^2$ de classe C^1 déterminée par :

$$\mathscr{C} := \big\{\, \big(x,u(x)\big)\,;\, x \in \mathbb{R}\big\}.$$

L'ensemble $\mathscr{C}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$. Sont complémentaire $\Omega := \mathscr{C}^c$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ à support contenu dans Ω. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi\big(x,u(x)\big) = 0,$$

de sorte que $S(\varphi) = 0$. Cela prouve que le support de S est contenu dans $\mathscr{C}$.

IV. On se donne $a \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ et $\Phi \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

IV.1. On suppose dans un premier temps que la fonction a est dans $C_c^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$. Prouver que la fonction $W_\varepsilon[ae^{i\Phi/\varepsilon}](\cdot)$ peut s'interpréter comme la transformée de Fourier partielle d'une distribution $R_\varepsilon \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ dont la limite au sens des distributions *tempérées* (lorsque le paramètre ε tend vers $0+$) existe. Cette limite est notée $R_0 \equiv R_0(a,\Phi) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$. Elle est à identifier.

Par construction, on a $W_\varepsilon[ae^{i\Phi/\varepsilon}] = \mathcal{F}_y(R_\varepsilon)$ *où* $R_\varepsilon \in C_c^0(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ *est définie via :*

$$R_\varepsilon(x,y) := \frac{1}{2\pi}\, a\Big(x + \frac{1}{2}\varepsilon y\Big)\, a\Big(x - \frac{1}{2}\varepsilon y\Big)\, e^{i[\Phi(x+\varepsilon y/2) - \Phi(x-\varepsilon y/2)]/\varepsilon}.$$

Par hypothèse, le support de a *est compact, contenu dans* $[-R,R]$ *pour un certain* $R \in \mathbb{R}_+^*$. *Le support de* $R_\varepsilon(\cdot)$ *est alors contenu dans le rectangle* $[-2R,2R] \times [-2R/\varepsilon, 2R/\varepsilon]$. *Par ailleurs, en exploitant la régularité de* a *et de* Φ*, on observe qu'on a (uniformément sur tout compact de* $\mathbb{R}^2$*) :*

$$R_\varepsilon(x,y) := \frac{1}{2\pi}\, a(x)^2\, e^{i\Phi'(x)y} + O(\varepsilon). \tag{1}$$

Cela conduit à considérer la fonction :

$$R_0(x,y) := \frac{1}{2\pi}\, a(x)^2\, e^{i\Phi'(x)y} \in C_b^0(\mathbb{R}^2) \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2).$$

Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. *Pour tout* $\tilde{R} \in \mathbb{R}_+^*$, *on a :*

$$\begin{aligned} |\langle R_\varepsilon - R_0, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}| \leq & \int_{|x|\leq R}\int_{|y|\leq \tilde{R}} |(R_\varepsilon - R_0)(x,y)|\, |\varphi(x,y)|\, dxdy \\ & + \frac{1}{\pi} \parallel a \parallel^2_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_{|x|\leq R}\int_{\tilde{R}\leq |y|} |\varphi(x,y)|\, dxdy. \end{aligned}$$

On sait déjà que :

$$\exists\, C(R,\tilde{R}) \in \mathbb{R}_+^*; \qquad \sup_{|x|\leq R\,,\, |y|\leq \tilde{R}} |(R_\varepsilon - R_0)(x,y)| \leq C(R,\tilde{R})\,\varepsilon.$$

Par ailleurs, comme $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, *on a :*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |\varphi(x,y)| \leq C(\varphi)(1 + x^2 + y^2)^{-1}.$$

Cela fournit :

$$\int_{\tilde{R}\leq|y|} |\varphi(x,y)|\, dy \leq 2C(\varphi)\int_{\tilde{R}}^{+\infty} (1+y^2)^{-1}\, dy \leq 4C(\varphi)\int_{\tilde{R}}^{+\infty}(1+y)^{-1}\, dy = \frac{4C(\varphi)}{1+\tilde{R}}.$$

On faite le bilan :

$$|\langle R_\varepsilon - R_0, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}| \leq 4R\,\tilde{R}\,C(R,\tilde{R})\,\varepsilon\, \parallel \varphi \parallel_{L^\infty(\mathbb{R})} + \frac{1}{\pi} \parallel a \parallel^2_{L^\infty(\mathbb{R})} \frac{8RC(\varphi)}{1+\tilde{R}}.$$

Soit $\eta \in \mathbb{R}_+^*$. *On commence par fixer* $\tilde{R}$ *suffisamment grand de sorte que :*

$$\frac{1}{\pi} \parallel a \parallel^2_{L^\infty(\mathbb{R})} \frac{8RC(\varphi)}{1+\tilde{R}} \leq \eta/2.$$

Puis, $\tilde{R}$ étant ainsi fixé, on ajuste ε de façon à ce que :

$$4R\,\tilde{R}\,C(R,\tilde{R})\,\varepsilon\ \parallel \varphi \parallel_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \eta/2.$$

Ainsi, pour ε suffisamment petit, on récupère :

$$|\langle R_\varepsilon - R_0, \varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}| \leq \eta,$$

ce qui fournit la convergence escomptée.

IV.2. On suppose toujours $a \in C_c^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$. Prouver qu'on a :

$$W_\varepsilon[ae^{i\Phi/\varepsilon}] \to S(\rho,u) \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2) \text{ lorsque } \varepsilon \to 0+$$

où les fonctions ρ et u sont à déterminer.

On commence à raisonner avec le cas $a \in C_c^0(\mathbb{R};\mathbb{R})$. Comme la transformée de Fourier est continue sur $\mathcal{S}'$, en s'appuyant sur la question IV.1, on peut déjà affirmer que :

$$W_\varepsilon[ae^{i\Phi/\varepsilon}] \to \mathcal{F}_y(R_0) \ \textit{dans}\ \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)\ \textit{lorsque}\ \varepsilon \to 0+.$$

Pour déterminer $\mathcal{F}_y(R_0)$, étant donné $\varphi(x,\xi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, on teste :

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{F}_y(R_0), \varphi\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int\int a(x)^2\, e^{i\Phi'(x)y}\,\mathcal{F}_\xi(\varphi)(x,y)\,dx\,dy \\
&= \int a(x)^2\,\mathcal{F}_y^{-1}\circ\mathcal{F}_\xi(\varphi)(x,\Phi'(x))\,dx \\
&= \int a(x)^2\,\varphi(x,\Phi'(x))\,dx.
\end{aligned}$$

Il devient alors clair que :

$$\mathcal{F}_y(R_0) = S(a^2,\Phi'), \quad \rho = a^2 \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{R}), \quad u = \Phi' \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R}).$$

D'un autre côté, pour $a \in L^2(\mathbb{R})$ et $\tilde{a} \in C_c^0(\mathbb{R};\mathbb{R})$, en s'appuyant sur la question I.4, on établit facilement que :

$$|W_\varepsilon[ae^{i\Phi/\varepsilon}](x,\xi) - W_\varepsilon[\tilde{a}e^{i\Phi/\varepsilon}](x,\xi)| \leq \frac{1}{\varepsilon\pi}\parallel a-\tilde{a}\parallel_{L^2(\mathbb{R})}\big(\parallel a\parallel_{L^2(\mathbb{R})} + \parallel \tilde{a}\parallel_{L^2(\mathbb{R})}\big).$$

Cette majoration (uniforme en ε) permet facilement d'étendre la validité du passage à la limite précédent au cas de $a \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

IV.3. Etablir que le résultat de convergence énoncé dans la question IV.2) persiste lorsqu'on suppose seulement $a \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

Il s'agit ici d'adapter le raisonnement suivi à la question IV.2). Etant donné $R \in \mathbb{R}_+^*$, on écrit cette fois-ci (appliquer Fubini) :

$$\begin{aligned}
|\langle R_\varepsilon - R_0,\varphi\rangle_{\mathcal{S}',\mathcal{S}}| \leq &\int_{|y|\leq R}\Big\{\int |(R_\varepsilon - R_0)(x,y)|\,|\varphi(x,y)|\,dx\Big\}\,dy \\
&+ \int_{R\leq|y|}\Big\{\int |(R_\varepsilon - R_0)(x,y)|\,|\varphi(x,y)|\,dx\Big\}\,dy.
\end{aligned}$$

On exploite la décroissance de $\varphi(\cdot)$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir :

$$\begin{aligned}
&\int_{R\leq|y|} \Big\{\int |(R_\varepsilon - R_0)(x,y)|\,|\varphi(x,y)|\,dx\Big\}\,dy \\
&\quad\leq \int_{R\leq|y|} \parallel \varphi(\cdot,y) \parallel_{L^\infty(\mathbb{R})} \Big(\parallel R_\varepsilon(\cdot,y) \parallel_{L^1(\mathbb{R})} + \parallel R_0(\cdot,y) \parallel_{L^1(\mathbb{R})}\Big)\,dy \\
&\quad\leq \int_{R\leq|y|} \frac{C(\varphi)}{1+y^2} \Big(\parallel a(\cdot+\frac{1}{2}\varepsilon y) \parallel_{L^2(\mathbb{R})}\parallel a(\cdot-\frac{1}{2}\varepsilon y) \parallel_{L^2(\mathbb{R})} + \parallel a \parallel^2_{L^2(\mathbb{R})}\Big)\,dy. \\
&\quad\leq \int_{R\leq y} \frac{8C(\varphi)}{(1+y)^2} \parallel a \parallel^2_{L^2(\mathbb{R})}\,dy \leq \frac{8C(\varphi)}{1+R} \parallel a \parallel^2_{L^2(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

Pour R choisi suffisamment grand, le terme de droite peut être rendu aussi petit que souhaité (uniformément en ε).

On s'intéresse maintenant aux y pour lesquels $|y| \leq R$. On a :

$$\begin{aligned}
\int |(R_\varepsilon - R_0)(x,y)|\,|\varphi(x,y)|\,dx \leq &\int_{|x|\leq\tilde{R}} |(R_\varepsilon - R_0)(x,y)|\,|\varphi(x,y)|\,dx \\
&+\int_{\tilde{R}\leq|x|} |(R_\varepsilon - R_0)(x,y)|\,|\varphi(x,y)|\,dx,
\end{aligned}$$

avec (toujours par la décroissance de $\varphi(\cdot)$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz) :

$$\begin{aligned}
\int_{\tilde{R}\leq|x|} |(R_\varepsilon - R_0)(x,y)|\,|\varphi(x,y)|\,dx &\leq \int_{\tilde{R}\leq|x|} \parallel \varphi(x,\cdot) \parallel_{L^\infty(\mathbb{R})} (|R_\varepsilon(x,y)| + |R_0(x,y)|)\,dx \\
&\leq C\tilde{R}^{-1} \parallel a \parallel^2_{L^2(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

Pour $\tilde{R}$ choisi suffisamment grand, le terme de droite peut être rendu aussi petit que souhaité (uniformément en ε).

Il reste à considérer les (x,y) pour lesquels $|x| \leq \tilde{R}$ et $|y| \leq R$, valeurs pour lesquelles on a (puisque Φ'' est localement borné) :

$$|R_\varepsilon(x,y) - R_0(x,y)| \leq \frac{1}{2\pi}|a(x+\frac{1}{2}\varepsilon y)a(x-\frac{1}{2}\varepsilon y) - a(x)^2| + C\varepsilon a(x)^2,$$

d'où l'on déduit :

$$\begin{aligned}
&\int_{|x|\leq\tilde{R}} |(R_\varepsilon - R_0)(x,y)|\,|\varphi(x,y)|\,dx \leq C\varepsilon \parallel a \parallel^2_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\qquad + \parallel a \parallel_{L^2(\mathbb{R})} \big(\parallel a(\cdot+\tfrac{1}{2}\varepsilon y) - a(\cdot) \parallel_{L^2(\mathbb{R})} + \parallel a(\cdot-\tfrac{1}{2}\varepsilon y) - a(\cdot) \parallel_{L^2(\mathbb{R})}\big).
\end{aligned}$$

Comme :

$$\lim_{h\to 0} \parallel a(\cdot+h) - a(\cdot) \parallel_{L^2(\mathbb{R})} = 0,$$

on a :

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \int_{R\leq|y|} \Big\{\int_{|x|\leq\tilde{R}} |(R_\varepsilon - R_0)(x,y)|\,|\varphi(x,y)|\,dx\Big\}\,dy = 0,$$

ce qui permet de conclure.

V. Soit $f^{in} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on désigne par Y_t l'application linéaire sur $\mathbb{R}^2$ définie par $Y_t(x,\xi) = (x - t\xi, \xi)$.

V.1. Expliquer pourquoi l'équation $(\partial_t + \xi\partial_x)f = 0$ admet pour solution particulière dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2)$ la distribution f définie par la formule :

$$\langle f, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}^2),\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}^2)} := \int_0^{+\infty} \langle f^{in} \circ Y_t, \varphi(t,\cdot)\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2),\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)}\, dt.$$

Il s'agit de vérifier que pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2)$, on a :

$$\langle (\partial_t + \xi\partial_x)f, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}^2),\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}^2)} = -\langle f, (\partial_t + \xi\partial_x)\varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}^2),\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}^2)} = 0.$$

On doit donc évaluer :

$$\langle f, (\partial_t + \xi\partial_x)\varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}^2),\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}^2)} = \int_0^{+\infty} \langle f^{in} \circ Y_t, (\partial_t + \xi\partial_x)\varphi(t,\cdot)\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2),\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)}\, dt.$$

Comme Y_t est de déterminant 1 et d'inverse Y_{-t}, d'après la formule de changement de variables pour les distributions, on a :

$$\langle f, (\partial_t + \xi\partial_x)\varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}^2),\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}^2)} = \int_0^{+\infty} \langle f^{in}, \big[(\partial_t + \xi\partial_x)\varphi\big](t, Y_{-t}(\cdot))\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2),\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)}\, dt.$$

On observe alors que :

$$\big[(\partial_t + \xi\partial_x)\varphi\big](t, Y_{-t}(\cdot)) = (\partial_t\varphi + \xi\partial_x\varphi)(t, x + t\xi, \xi) = \partial_t\big[\varphi(t, Y_{-t}(\cdot))\big],$$

puis, par interversion des crochets de dualité et de la dérivation :

$$\langle f, (\partial_t + \xi\partial_x)\varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}^2),\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}^2)} = \int_0^{+\infty} \partial_t\Big[\langle f^{in}, \varphi(t, Y_{-t}(\cdot))\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2),\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)}\Big]\, dt = 0$$

puisqu'on intègre la dérivée d'une fonction à support compact dans $\mathbb{R}_+^*$.

V.2. Soit $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}_+)$ vérifiant :

$$\operatorname{supp}\chi(\cdot) \subset]0,1[, \qquad \int_{\mathbb{R}} \chi(t)\, dt = 1.$$

On pose $\chi_n(t) := n\chi(nt)$. Pour $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2)$ défini comme en V.1, montrer qu'on a :

$$\forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2), \qquad \lim_{n\to+\infty} \langle f, \chi_n \otimes \psi\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}^2),\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}^2)} = \langle f^{in}, \psi\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2),\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)}, \tag{2}$$

donnant ainsi un sens à la trace en $t = 0$ de la distribution f. Lorsque la propriété (2) est vérifiée, on écrit $f_{|t=0} = f^{in}$.

Par définition :

$$\begin{aligned}\langle f, \chi_n \otimes \psi\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}^2),\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}^2)} &= \int_0^{+\infty} \langle f^{in} \circ Y_t, (\chi_n \otimes \psi)(t,\cdot)\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2),\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)}\, dt \\ &= \int_0^{+\infty} \chi_n(t)\langle f^{in}, \psi \circ Y_{-t}\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2),\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)}\, dt.\end{aligned}$$

On considère la famille $(\psi \circ Y_{-t})_{t\in\mathbb{R}_+^*}$ *lorsque* t *tend vers* $0+$*. D'abord, on peut trouver un nombre* $R \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que :*

$$supp\, \psi \subset [-R, R] \times [-R, R].$$

Comme $\psi \circ Y_{-t}(x, \xi) = \psi(x + t\xi, \xi)$*, on a :*

$$supp\, \psi \circ Y_{-t} \subset [-(1 + t)R, (1 + t)R] \times [-R, R].$$

En particulier, on dispose du contrôle uniforme :

$$\forall\, t \in]0, 1], \quad supp\, \psi \circ Y_{-t} \subset [-2R, 2R] \times [-R, R],$$

Par ailleurs, pour tout $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^2$*, on a :*

$$\partial^\alpha(\psi \circ Y_{-t})(x, \xi) = \sum_{j=0}^{\alpha_2} t^j\, (\partial_x^{\alpha_1+j} \partial_\xi^{\alpha_2} \psi)(x + t\xi, \xi),$$

ce qui implique :

$$\lim_{t\to 0+} \parallel \partial^\alpha(\psi \circ Y_{-t}) - \partial^\alpha \psi \parallel_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} = 0.$$

En d'autres termes, la famille $(\psi \circ Y_{-t})_{t\in\mathbb{R}_+^*}$ *converge dans* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ *lorsque* t *tend vers* $0+$ *vers* ψ*. Par conséquent :*

$$\lim_{t\to 0+} \langle f^{in}, \psi \circ Y_{-t} \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2),\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)} = \langle f^{in}, \psi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2),\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)}.$$

Dès lors, du fait des propriétés de $\chi(\cdot)$*, on récupère :*

$$\begin{aligned} &\langle f, \chi_n \otimes \psi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}^2),\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}^2)} - \langle f^{in}, \psi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2),\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)} \\ &\quad = \int_0^{+\infty} \chi_n(t) \big[\langle f^{in} \circ Y_{-t}, \psi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2),\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)} - \langle f^{in}, \psi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2),\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)}\big]\, dt = o(1), \end{aligned}$$

ce qui équivaut au résultat escompté.

V.3. Montrer que le problème de Cauchy qui consiste à trouver $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2)$ vérifiant :

$$\begin{cases} (\partial_t + \xi\partial_x)f = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2), \\ f_{|t=0} = f^{in}, \end{cases} \tag{3}$$

admet une unique solution.

Soit f *une telle solution. La distribution* $f \circ Y_{-t} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2)$ *vérifie (au sens des distributions) l'équation aux dérivées partielles* $\partial_t(f \circ Y_{-t}) = 0$*. En effet, on a :*

$$\begin{aligned} \langle \partial_t(f \circ Y_{-t}), \varphi \rangle &= -\langle f \circ Y_{-t}, \partial_t\varphi \rangle = -\langle f, (\partial_t\varphi) \circ Y_t \rangle \\ &= -\langle f, (\partial_t + \xi\partial_x)(\varphi \circ Y_t) \rangle = \langle (\partial_t + \xi\partial_x)f, \varphi \circ Y_t \rangle = 0. \end{aligned}$$

Cela implique (voir le cours et les TDs) l'existence de $g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ tel que $f = C \otimes g$ pour une certaine constante $C \in \mathbb{R}$. La seconde condition impose alors qu'on a, pour toute fonction test $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, la relation :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \quad & \langle C \otimes g, \chi_n \otimes \psi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2), \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2)} = \langle f^{in}, \psi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2), \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)}, \\ & = \lim_{n\to+\infty} \big(\langle C, \chi_n \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^*), \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*)} \times \langle g, \psi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2), \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)} \big) \\ & = \langle Cg, \psi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2), \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)}.\end{aligned}$$

On a donc nécessairement $f^{in} = Cg$. Pour $C = 0$, on a $f = f^{in} = 0$. Pour $C \neq 0$, on a $f = C \otimes g = 1 \otimes (Cg) = 1 \otimes f^{in}$. Dans tous les cas, f est déterminée de façon unique.

VI. On suppose dans cette question que $\rho \in C_c^0(\mathbb{R})$ tandis que $u \in C_c^1(\mathbb{R})$ est une fonction non identiquement nulle.

VI.1. Expliquer pourquoi :

$$F := \sup_{x \in \mathbb{R}} \max\big(-u'(x); 0\big) > 0.$$

Par l'absurde. Sinon, on a $0 \leq u'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ de sorte que :

$$0 \leq u(x) = \int_{-\infty}^{x} u'(t)\, dt,$$

mais aussi :

$$u(x) = -\int_{x}^{+\infty} u'(t)\, dt \leq 0.$$

Finalement $u(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire $u \equiv 0$, ce qui est une contradiction.

VI.2. On pose $T^* := F^{-1} \in \mathbb{R}_+^*$. On choisit pour f^{in} la distribution $S(\rho, u) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ définie conformément à la question III. Montrer que, pour tout instant $t \in [0; T^*[$, la distribution $f^{in} \circ Y_t$ est encore de la forme $S(R, U)$ où les fonctions R et U sont à déterminer. Quelles sont les régularités de R et U en x à t fixé, ainsi qu'en (t, x).

Pour $t < T^*$, l'application :

$$\begin{aligned} G_t \,:\, \mathbb{R} \quad & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ x \quad & \longmapsto \quad \tilde{x} := x + t u(x) \end{aligned}$$

vérifie :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad G_t'(x) = 1 + t u'(x) > 0, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} G_t(x) = \pm\infty.$$

C'est donc un difféomorphisme de classe C^1. On écrit :

$$\begin{aligned}\langle S(\rho, u) \circ Y_t, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2), \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2)} \quad & = \int_0^{+\infty} \langle S(\rho, u), (\varphi \circ Y_{-t})(t, \cdot) \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2), \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)}\, dt \\ & = \int_0^{+\infty} \int \rho(x)\, \varphi\big(t, x + t u(x), u(x)\big)\, dt dx.\end{aligned}$$

Le changement de variables $\tilde{x} = G_t(x)$ donne accès à :

$$\begin{aligned}\langle S(\rho,u)\circ Y_t,\varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}^2),\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}^2)} &= \int_0^{+\infty}\int \frac{\rho\circ G_t^{-1}(\tilde{x})}{G_t'\circ G_t^{-1}(\tilde{x})}\,\varphi\big(t,\tilde{x},u\circ G_t^{-1}(\tilde{x})\big)\,dtd\tilde{x}\\ &= \langle S(R,U),\varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}^2),\mathcal{D}(\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}^2)},\end{aligned}$$

avec :

$$R(t,\cdot) := \frac{\rho\circ G_t^{-1}(\cdot)}{G_t'\circ G_t^{-1}(\cdot)} \in C_c^0(\mathbb{R}), \quad U(t,\cdot) := u\circ G_t^{-1}(\cdot)\in C_c^1(\mathbb{R}).$$

L'application G dépend de façon C^∞ du paramètre t. Ce sont donc les régularités de ρ et de u qui limitent respectivement les régularités de R et de U en t. Autrement dit :

$$R(\cdot)\in C^0(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}), \quad U(\cdot)\in C^1(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}).$$

VI.3. Quels sont les problèmes de Cauchy vérifiés par R et U ? Expliquer comment cela permet de déterminer entièrement R et U (et dans quel ordre).

Les relations définissant R et U sont équivalentes à :

$$G_t'(x)\,R\big(t,G_t(x)\big) = \rho(x), \quad U\big(t,G_t(x)\big) = u(x),$$

ce qui fournit après dérivation en t :

$$\partial_t U\big(t,G_t(x)\big) + \partial_t G_t(x)\,\partial_x U\big(t,G_t(x)\big) = 0,$$

ainsi que :

$$G_t'(x)\left[\partial_t R\big(t,G_t(x)\big) + \partial_t G_t(x)\,\partial_x R\big(t,G_t(x)\big)\right] + \partial_t G_t'(x)\,R\big(t,G_t(x)\big) = 0.$$

On calcule :

$$\partial_t G_t(x) = u(x), \quad \partial_t G_t'(x) = u'(x), \quad \partial_{\tilde{x}} U(t,\tilde{x}) = \frac{u'\circ G_t^{-1}(\tilde{x})}{1+tu'\circ G_t^{-1}(\tilde{x})}.$$

Sachant cela, en remplaçant $G_t(x)$ par $\tilde{x}$, cela conduit d'une part à la loi de Bürger :

$$\partial_t U(t,\tilde{x}) + U(t,\tilde{x})\,\partial_x U(t,\tilde{x}) = 0,$$

et d'autre part à :

$$\partial_t R(t,\tilde{x}) + U(t,\tilde{x})\,\partial_x R(t,\tilde{x}) + \partial_{\tilde{x}} U(t,\tilde{x})\,R(t,\tilde{x}) = 0.$$

Par ailleurs, comme $G_0 = Id$, les traces en $t = 0$ des fonctions $R(t,\cdot)$ et $U(t,\cdot)$ sont respectivement ρ et u. L'expression U est donc solution du problème de Cauchy (qui est autocontenu) suivant, composé d'une équation aux dérivées partielles (scalaire et non linéaire) et d'une condition initiale :

$$\left\{\begin{array}{l}\partial_t U + \dfrac{1}{2}\partial_x(U^2) = 0 \ \textit{dans}\ C^0(\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}),\\ U_{|t=0} = u.\end{array}\right. \tag{4}$$

Une fois la fonction U connue, on peut aller chercher R via l'équation de transport :

$$\begin{cases} \partial_t R + \partial_x (UR) = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}), \\ R_{|t=0} = \rho. \end{cases} \tag{5}$$

Chacun de ces problèmes admet une unique solution.

VI.4. Que se passe-t'il concernant la fonction dérivée $\partial_x U(t,\cdot)$ lorsque t tend vers T^* par valeurs inférieures ? Et que comment cela peut-il s'interpréter ?

Comme $u(\cdot)$ est à support compact, le supremum F est atteint (au moins) en un point x^* qui est tel que :

$$F = -u'(x^*) > 0, \quad 1 - F\,T^* = 0.$$

On pose $\tilde{x}^* := G_t(x^*)$. Par construction, on a :

$$\forall\, t \in [0, T^*[, \quad \partial_{\tilde{x}} U(t, \tilde{x}^*) := \frac{u' \circ G_t^{-1}(\tilde{x}^*)}{1 + tu' \circ G_t^{-1}(\tilde{x}^*)} = \frac{u'(x^*)}{1 + tu'(x^*)} = -\frac{F}{1 - F\,t}.$$

La dérivée $\partial_{\tilde{x}} U(t, \tilde{x}^*)$ explose donc vers $-\infty$ lorsque t tend vers T^*, ou encore :

$$\lim_{t \to T^*-} \parallel \partial_x U(t,\cdot) \parallel_{L^\infty(\mathbb{R})} = +\infty.$$

Ce comportement prouve l'impossibilité de prolonger la solution de (4) au delà de l'instant d'arrêt T^* dans la classe des fonctions de classe C^1. En fait, il est possible de résoudre au sens des distributions (4) pour tout temps (solution globale en temps) mais dans une classe de solutions moins régulières (comportant des discontinuités d'ordre zéro).