UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Distribution et ANalyse de Fourier

DM à rendre pour le 07/05/2020

Problème. Etant donné $d \in \mathbb{N}^*$, on désigne par $C_c^0(\mathbb{R}^d) \equiv C_c^0(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ qui sont continues, à valeurs complexes et à support compact. Comme à l'usuel, l'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \equiv C_c^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{C})$ regroupe l'ensemble des fonctions qui sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d$, à valeurs complexes et à support compact.

I. Dans cette question I, on fixe $\psi \in C_c^0(\mathbb{R})$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

I. Expliquer pourquoi, pour tout $(x, \xi) \in \mathbb{R}^2$, l'expression :

$$W_\varepsilon[\psi](x, \xi) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \psi\Big(x + \frac{1}{2}\varepsilon y\Big)\, \overline{\psi\Big(x - \frac{1}{2}\varepsilon y\Big)}\, e^{-i\xi y}\, dy$$

est bien définie, et est un nombre réel.

I.2. Montrer que $W_\varepsilon[\psi](\cdot)$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.

I.3. Etablir l'inégalité :

$$\| W_\varepsilon[\psi] \|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq \frac{1}{\varepsilon\pi} \| \psi \|^2_{L^2(\mathbb{R})} .$$

I.4. Soit maintenant $\tilde{\psi} \in C_c^0(\mathbb{R})$. Etablir l'inégalité :

$$\| W_\varepsilon[\psi] - W_\varepsilon[\tilde{\psi}] \|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq \frac{1}{\varepsilon\pi} (\| \psi \|^2_{L^2(\mathbb{R})} + \| \tilde{\psi} \|^2_{L^2(\mathbb{R})})\, \| \psi - \tilde{\psi} \|_{L^2(\mathbb{R})} .$$

II. Soit maintenant $\psi \in L^2(\mathbb{R})$. Montrer qu'on peut encore donner un sens à $W_\varepsilon[\psi](\cdot)$ sous la forme d'une fonction continue et bornée.

III. On se donne $\rho \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ et $u \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. On considère l'application :

$$\begin{array}{rccl} S \equiv S(\rho, u) \ : \ \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) & \longrightarrow & \mathbb{C} & \\ \varphi & \longmapsto & S(\varphi) := \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \rho(x)\, \varphi(x, u(x))\, dx. & \end{array}$$

III.1. Montrer que S est une distribution d'ordre zéro. A-t'on $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$?

III.2. Montrer que le support de S est contenu dans une courbe de $\mathbb{R}^2$ que l'on demande de déterminer.

IV. On se donne $a \in L^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ et $\Phi \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$.

IV.1. On suppose ici que la fonction a est dans $C_c^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. Prouver que la fonction $W_\varepsilon[a e^{i\Phi/\varepsilon}](\cdot)$ peut s'interpréter comme la transformée de Fourier partielle d'une distribution $R_\varepsilon \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ dont la limite au sens des distributions *tempérées* (lorsque le paramètre ε tend vers $0+$) existe. Cette limite notée $R_0 \equiv R_0(a, \Phi) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2)$ est à identifier.

IV.2. On suppose toujours $a \in C_c^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$. Prouver qu'on a :

$$W_\varepsilon[ae^{i\Phi/\varepsilon}] \to S(\rho, u) \text{ dans } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^2) \text{ lorsque } \varepsilon \to 0+$$

où les fonctions ρ et u sont à déterminer.

IV.3. Etablir que le résultat de convergence énoncé dans la question IV.2) persiste lorsqu'on suppose seulement $a \in L^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

V. Soit $f^{in} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on désigne par Y_t l'application linéaire sur $\mathbb{R}^2$ définie par $Y_t(x,\xi) = (x - t\xi, \xi)$.

V.1. Expliquer pourquoi l'équation $(\partial_t + \xi\partial_x)f = 0$ admet pour solution particulière dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2)$ la distribution f définie par la formule :

$$\langle f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2), \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2)} := \int_0^{+\infty} \langle f^{in} \circ Y_t, \varphi(t,\cdot) \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2), \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)} \, dt.$$

V.2. Soit $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}_+)$ vérifiant :

$$\operatorname{supp} \chi(\cdot) \subset]0,1[, \qquad \int_{\mathbb{R}} \chi(t)\, dt = 1.$$

On pose $\chi_n(t) := n\chi(nt)$. Pour $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2)$ défini comme en V.1, montrer qu'on a :

$$\forall \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2), \quad \lim_{n \to +\infty} \langle f, \chi_n \otimes \psi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2), \mathcal{D}(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2)} = \langle f^{in}, \psi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2), \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)}, \tag{1}$$

donnant ainsi un sens à la trace en $t = 0$ de la distribution f. Lorsque la propriété (1) est vérifiée, on écrit $f_{|t=0} = f^{in}$.

V.3. Montrer que le problème de Cauchy qui consiste à trouver $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2)$ vérifiant :

$$\begin{cases} (\partial_t + \xi\partial_x)f = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2), \\ f_{|t=0} = f^{in}, \end{cases} \tag{2}$$

admet une unique solution.

VI. On suppose dans cette question que $\rho \in C_c^0(\mathbb{R})$ tandis que $u \in C_c^1(\mathbb{R})$ est une fonction non identiquement nulle.

VI.1. Expliquer pourquoi :

$$F := \sup_{x \in \mathbb{R}} \max\big(-u'(x); 0\big) > 0.$$

VI.2. On pose $T^* := F^{-1} \in \mathbb{R}_+^*$. On choisit pour f^{in} la distribution $S(\rho, u) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ définie conformément à la question III. Montrer que, pour tout instant $t \in [0; T^*[$, la distribution $f^{in} \circ Y_t$ est encore de la forme $S(R, U)$ où les fonctions R et U sont à déterminer. Quelles sont les régularités de R et U en x à t fixé, ainsi qu'en (t,x).

VI.3. Quels sont les problèmes de Cauchy vérifiés par R et U ? Expliquer comment cela permet de déterminer entièrement R et U (et dans quel ordre).

VI.4. Que se passe-t'il concernant la fonction dérivée $\partial_x U(t,\cdot)$ lorsque t tend vers T^* par valeurs inférieures ? Et comment cela peut-il s'interpréter ?