Feuille de TD n°6
Espaces de Sobolev

Exercice 1

1. Pour quelles valeurs de $s \in \mathbb{R}$ a-t'on $\delta_0 \in H^s(\mathbb{R}^n)$?
2. Soit H la fonction de Heaviside. Pour quelles valeurs de $s \in \mathbb{R}$ a-t'on $H \in H^s(\mathbb{R}^n)$?
3. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour quelles valeurs de $s \in \mathbb{R}$ a-t'on $\delta_0^{(k)} \in H^s(\mathbb{R})$?

Exercice 2

Soit $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ vérifiant pour $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ la condition :

$$\Delta(\Delta u) - 2\,\Delta u + u = f\,, \qquad \Delta := \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}^2\,.$$

Pour quelles valeurs de $s \in \mathbb{R}$ a-t'on $u \in H^s(\mathbb{R})$?

Exercice 3

1. Soit $s \in \mathbb{R}$. Démontrer l'inégalité (de Peetre) :

$$(1+|\xi|^2)^s \leq 2^{|s|}\ (1+|\xi-\eta|^2)^{|s|}\ (1+|\eta|^2)^s$$

2. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $s > 0$. Montrer que l'application $u \longmapsto \varphi\, u$ est continue de $H^s(\mathbb{R}^n)$ dans $H^s(\mathbb{R}^n)$.