

Feuille de TD n°4  
Convolution de distributions et équations

### Exercice 1

---

Quelques calculs de convolutions.

1. Expliciter  $T * \delta_0$  et  $T * \delta_a$ , avec  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$  et  $a \in \mathbb{R}^N$ .
2.  $f * \mathbf{1}_{[a,b]}$  avec  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  et  $\mathbf{1}_{[a,b]} * \mathbf{1}_{[c,d]}$  avec  $a, b, c$  et  $d$  dans  $\mathbb{R}$  et  $a < b, c < d$ .
3.  $\delta_a * \delta_b$ .
4.  $\delta'_0 * \delta'_0$ .
5. Que peut-on dire de  $H * f$  avec  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$  à support dans  $\mathbb{R}^+$  ?

### Exercice 2

---

Soit  $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$  et  $P$  un polynôme de degré  $k$ . Montrer que  $S * P$  est également un polynôme de degré au plus  $k$ .

### Exercice 3

---

1. Soit  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . Montrer qu'il existe une distribution  $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  à support compact telle que  $S * T = T^{(k)}$ .
2. Soit  $T, S$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ,  $S$  à support compact, et  $n \in \mathbb{N}$ . Démontrer la formule suivante :

$$x^n(T * S) = \sum_{k=0}^n C_n^k (x^k T) * (x^{n-k} S).$$

### Exercice 4

---

Soit  $E$  la distribution de  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$  donnée par la fonction

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^2, \quad E(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } t - |x| > 0 \\ 0 & \text{si } t - |x| \leq 0. \end{cases}$$

1. Calculer  $(\partial_{tt}^2 - \partial_{xx}^2)E$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ .
2. En déduire une solution  $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$  de l'équation

$$(\partial_{tt}^2 - \partial_{xx}^2)u = f$$

avec  $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$  à support compact.

3. Que peut-on dire sur la régularité de  $u$  lorsque le second membre de l'équation est dans  $\mathcal{D}(\Omega)$ ,  $\Omega$  ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$ .

### Exercice 5

---

1. Pour  $\varphi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$  on note

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t, t) dt, \quad \langle T^+, \varphi \rangle = \int_0^\infty \varphi(t, t) dt.$$

Montrer que  $T, T^+ \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$  et calculer  $\partial_1 T + \partial_2 T$  ainsi que  $\partial_1 T^+ + \partial_2 T^+$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ .

2. Soit  $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 \geq |x_1|\}$  et  $F$  la fonction indicatrice de  $D$ . Calculer les expressions suivantes :

$$\partial_1 F - \partial_2 F \quad \text{et} \quad \partial_1^2 F - \partial_2^2 F \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2).$$

3. Soit la fonction  $E : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par

$$E(t, x) = \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

Calculer  $\partial_t E - \partial_x^2 E$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ .