Université de Rennes I Année 2019-2020
Magistère **DanF**

Feuille de TD: 4

Exercice 1 Trouver toutes les fonctions $f \in L^1(\mathbb{R})$ vérifiant : $f \star f = f$.

Exercice 2 Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\widehat{f}$ pour que l'équation

$$u - u \star f = f$$

admet une solution $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Exercice 3 Soit $f = \chi_{[-1,1]}$ la fonction caractéristique de $[-1,1]$.

1. Calculer la transformée de Fourier $\widehat{f}$ ainsi que
$$f', \quad (f \star f)', \quad f \star f$$
2. Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$\int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \Big(\frac{\sin \xi}{\xi}\Big)^2 d\xi$$

Exercice 4 Soit $\lambda > 0$ et on pose
$$f(x) = e^{-\lambda |x|}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

1. Calculer la transformation de Fourier de f.
2. En déduire la transformation de fourier de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.
3. En déduire les avaleurs des intégrales
$$\int_0^\infty \frac{\cos(x)}{1+x^2} d\, x, \qquad \int_0^\infty \frac{\sin(x)x}{(1+x^2)^2} dx.$$

Exercice 5 On suppose que $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $f^{'} \in L^2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on a
$$f(x) = f(y) + \int_y^x f'(t) dt$$
2. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et tend vers zéro à l'infini
3. En déduire que $f \in L^p(\mathbb{R})$, $\forall p \in [1, \infty]$.
4. Montrer que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

Exercice 6 Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ une fonction impaire.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$\hat{f}(t) = -2i \int_0^{+\infty} f(x) \sin(xt) dx.$$
2. Prouver que la fonction $\phi(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u} du$ est définie, continue est bornée sur $[0, +\infty[$.

3. Montrer que l'on a :
$$\int_1^R \frac{\hat{f}(t)}{t} dt = \int_0^{+\infty} -2if(x)(\int_x^{Rx} \frac{\sin(u)}{u} du)dx.$$
En déduire :
$$\lim_{R\to+\infty} \int_1^R \frac{\hat{f}(t)}{t} dt = -2i \int_0^{+\infty} f(x)\phi(x)dx.$$
4. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$g(x) = \frac{\arctan x}{\ln(2+x^2)}.$$
5. Montrer que $g \in C_0(\mathbb{R})$.
6. On suppose qu'il existe $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\hat{f} = g$. Montrer que f est nécessairement impaire (presque partout).
7. En déduire que g n'est pas la transformée de Fourier d'une fonction appartenant à $L^1(\mathbb{R})$.

Exercice 7 Soit H de la fonction de Heaviside H. Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ on définit $H_n(x) = e^{-x/n}H(x)$

1. Montrer que (H_n) converge vers H dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$
2. Calculer la transformée de Fourier de H_n.
3. En déduire celle de H et de $\text{vp}(\frac{1}{x})$.
4. Calculer la limite dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ de la suite
$$f_n(x) = \frac{1-\cos(nx)}{x}.$$

Exercice 8 Montrer que les distributions suivantes sont des distributions tempérées et calculer leur transformées de Fourier :
$$\delta_a, \qquad e^{iax}, \qquad \sin(x), \qquad \sin^2(x), \qquad \frac{\sin(x)}{x}, \qquad e^{-|x|}.$$

Exercice 9 Soit $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et valant 1 dans $B(0,1)$

1. Montrer qu'il existe $E \in S'(\mathbb{R}^d)$ telle que $\widehat{E}(\xi) = \frac{1-\chi(\xi)}{|\xi|^2}$
2. En déduire que
$$\Delta E - \delta_0 \in S(\mathbb{R}^d)$$
3. Montrer que $E \in C^\infty(\mathbb{R}^d \backslash \{0\})$.
4. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ telle que $\Delta T \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Montrer que $T \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Exercice 10 Soit (a_k) une suite de nombres complexes et
$$T = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \delta_n, \qquad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$
Montrer que $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe $p \geqslant 1$ tel que
$$|a_n| \leqslant C(1+n)^p, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$