Feuille de TD n°3
Opérations sur les distributions et quelques équations

Exercice 1

Résoudre dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'équation suivante :

$$x^2 T = 2.$$

Exercice 2

Soit α, β, s des nombres réels tels que $\alpha \neq \beta$. On considère la fonction $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$u(t,x) = \begin{cases} \alpha, & \text{si} \quad x < st \\ \beta, & \text{si} \quad x \geq st. \end{cases}$$

Expliciter une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients α, β, s pour que u vérifie au sens des distributions l'équation suivante :

$$\partial_t u + \partial_x (u^2) = 0.$$

Exercice 3

On définit l'application $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ par

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} e^{inx} \varphi(x) dx.$$

1. Montrer que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
2. Prouver que
$$\tau_{2\pi} T = T \qquad \text{et} \qquad e^{ix} T = T.$$
3. Montrer que
$$\text{supp } T \subset 2\pi\mathbb{Z}.$$
4. Soit $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{e^{i\,nx}}{1+n^2}$. Prouver que
$$f'' - f = -T, \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$
5. En déduire que
$$f(x) = c(e^{x-\pi} + e^{-x+\pi}) \qquad \forall x \in]0, 2\pi[.$$
D'autre part calculer $\int_0^{2\pi} f(x) dx$ et c.
6. Montrer que
$$T_{|]-2\pi,2\pi[} = 2\pi \delta_0 \qquad \text{et} \qquad T = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{2n\pi}.$$
7. En déduire la formule sommatoire de Poisson :
$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(n) e^{inx} = 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(x + 2n\pi).$$

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \delta_{\frac{1}{k}} - n\delta_0 + \log n \delta_0'.$$

1. Montrer que $T := \lim T_n$ définit un élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
2. Chercher le support de T.

Exercice 5

Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ est homogène de degré $p \in \mathbb{R}$ si pour tout $\lambda > 0$ et $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on a l'égalité

$$\langle T, \phi(\lambda\,.)\rangle = \lambda^{-n-p}\langle T, \phi\rangle.$$

1. Montrer que la masse de Dirac et la distribution $\mathrm{vp}\frac{1}{x}$ sont homogènes, en précisant leur ordre.
2. Déterminer les distributions homogènes de degré -1 sur $\mathbb{R}$ dont le support est 0.
3. Dans le cas où T est une distribution associée à une fonction f de classe C^∞ quelle est la propriété vérifiée par f lorsque T est homogène de degré p ?
4. Montrer qu'une distribution est homogène de degré p si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial T}{\partial x_i} = pT.$$

5. En déduire toutes les distributions homogènes sur $\mathbb{R}$ de degré 2.

Exercice 6

On considère l'équation suivante dans $\mathcal{D}'\mathbb{R})$:

$$(\star) \qquad T'' + T' + \frac{5}{4}T = \delta_0'.$$

1. On pose $S = e^{\frac{t}{2}}T$. Quelle est l'équation vérifiée par S ?
2. On recherche des solutions sous la forme $S = gH$ où g est une fonction de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et H est la fonction de Heaviside.
   (i) Donner l'équation différentielle que doit satisfaire g ainsi que les conditions initiales.
   (ii) En déduire une solution de $(\star)$.
3. Quel est l'ensemble des solutions dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$?