Université de Rennes I — Année 2019-2020
Magistère — **DanF**

Feuille de TD: 3

Exercice 1 Résoudre dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ l'équation

$$x^2T = 2.$$

Exercice 2 Soit α, β, s des nombres réels tels que $\alpha \neq \beta$. On considère la fonction $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$u(t,x) = \begin{cases} \alpha, & \text{if} \quad x < st \\ \beta, & \text{if} \quad x \geqslant st. \end{cases}$$

Chercher une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients pour que u vérifie au sens des distributions l'équation,

$$\partial_t u + \partial_x(u^2) = 0.$$

Exercice 3 On définit l'application $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ par

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} e^{inx}\varphi(x)dx.$$

1. Montrer que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
2. Prouver que
$$\tau_{2\pi}T = T, \quad e^{ix}T = T.$$
3. Montrer que
$$\text{supp } T \subset 2\pi\mathbb{Z}.$$
4. Soit $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \dfrac{e^{i\,nx}}{1+n^2}$. Prouver que
$$f'' - f = -T, \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$
5. En déduire que
$$f(x) = c(e^{x-\pi} + e^{-x+\pi}), \quad \forall x \in]0, 2\pi[.$$
Calculer $\int_0^{2\pi} f(x)dx$ et c.
6. Montrer que
$$T_{|]-2\pi,2\pi[} = 2\pi\delta_0, \quad T = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{2n\pi}.$$
7. En déduire la formule sommatoire de Poisson :
$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(n)e^{inx} = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi(x + 2n\pi).$$

Exercice 4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \delta_{\frac{1}{k}} - n\delta_0 - \log n \delta_0'.$$

1) Montrer que $T := \lim T_n$ définit un élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.
2) Chercher le support de T.
3) Soit $u \in \mathcal{D}'(]0, \infty[,)$ définie par $u := \sum_k \delta_{\frac{1}{k}}$. Chercher les $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, telle que $\mathit{supp}\, v \in [0, \infty[$ et $v = u$ sur $]0, \infty[$.

Exercice 5 On considère l'équation suivante dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

$$(\star) \qquad T'' + T' + \frac{5}{4}T = \delta_0'.$$

1. On pose $S = e^{-\frac{t}{2}}T$. Quelle est l'équation vérifiée par S?
2. On cherche des solutions sous la forme $S = gH$ où g est une fonction de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ et H est la fonction de Heaviside.
   (i) Donner l'équation différentielle que doit satisfaire g ainsi que les conditions initiales.
   (ii) En déduire une solution de $(\star)$.
3. Quel est l'ensemble des solutions dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.