Feuille de TD 2
Calcul de distributions

Exercice 1

1. Montrer que l'application suivante définit une distribution sur $\mathbb{R}$:
$$\langle \frac{1}{x+i0}, \varphi \rangle = \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x+i\epsilon} dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$
2. Montrer que $\frac{1}{x+i0} = \mathrm{vp}(\frac{1}{x}) - i\pi\delta_0$.

Exercice 2

On considère l'application $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $\langle T, \varphi \rangle = \sum_{n \geq 1} \Big(\varphi(\frac{1}{n^2}) - \varphi(0) \Big)$.

1. Montrer que T définit une distribution.
2. Calculer l'ordre de cette distribution.

Exercice 3

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et $I \subset \Omega$ sans point d'accumulation dans Ω. Soit $(c_i)_{i \in I}$ une famille arbitraire de $\mathbb{C}$. On définit l'application $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ par $\langle T, \varphi \rangle = \sum_{i \in I} c_i \varphi(i)$.

1. Montrer que T est une distribution.
2. Calculer son ordre.

Exercice 4

On considère $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $\langle T, \varphi \rangle = \sum_{n \geq 1} \varphi^{(n)}(n)$. Montrer que T est une distribution d'ordre infini.

Exercice 5

Montrer qu'il n'existe pas une distribution sur $\mathbb{R}$ telle que sa restriction sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ vaut $e^{1/x}$.

Exercice 6

Pour $-2 < \alpha < -1$ montrer que quel que soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ on a $\int_\epsilon^\infty x^\alpha \phi(x)\, dx = A\epsilon^{\alpha+1} + R_\epsilon$, où A dépend de ϕ mais pas de ϵ et où R_ϵ tend vers une limite pour $\epsilon \to 0$. On pose $\langle pf(x_+^\alpha), \phi \rangle = \lim_{\epsilon \to 0} R_\epsilon$. Montrer que $pf(x_+^\alpha)$ est une distribution d'ordre inférieur ou égal à 1.

Exercice 7

Soit $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^\star) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par: $\langle T, \varphi \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi^{(j)}(\frac{1}{j})$.

1. Montrer que T est une distribution.

2. On veut montrer qu'il n'existe pas de distribution $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^*)$,
$$\langle S, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle.$$
On raisonne par l'absurde et on suppose qu'une telle distribution S existe.
   (a) Montrer que pour toute suite (a_k) de réels donnés, il existe une fonction $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ de support inclus dans $]3/4, 5/4[$ et telle que $f^{(j)}(1) = a_j$ quel que soit j.
   (b) Poser $f_k(x) = f(k^2x - k + 1)$ et montrer que les supports des $(f_k)_{k\geq 1}$ sont deux à deux disjoints.
   (c) Calculer $f_k^{(j)}(\frac{1}{j})$.
   (d) En prenant $K = [0, \frac{5}{4}]$, $\phi = \sum_1^m f_k$ et $a_k = 1$ montrer que S ne peut pas être continue sur $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Exercice 8

Calculer la limite des suites de distributions sur $\mathbb{R}$ définies par les fonctions suivantes :
$$T_n(x) = \sin(nx), \qquad T_n(x) = \frac{\sin(nx)}{x}, \qquad T_n = n\sin(nx)\chi_{x\geq 0}, \qquad T_n(x) = nf(nx) \quad \text{avec} \quad f \in L^1(\mathbb{R}).$$
$$T_n = n(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{1}{n}}), \qquad T_n = e^{inx}\mathrm{vp}(\frac{1}{x}).$$

Exercice 9

Montrer les identités suivantes
$$x\delta_0' = -\delta_0, \quad \frac{d}{dx}\log|x| = \mathrm{vp}(\frac{1}{x})$$

Exercice 10

Soit f la fonction sur $\mathbb{R}$ donnée par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2x)}{n^2}$. Montrer que $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et calculer sa dérivée.

Exercice 11

(Division par x dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$) Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ donnée.

1. Montrer que si $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\phi(0) = 0$ alors $x \mapsto \frac{\phi(x)}{x}$ est dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.
2. Montrer qu'il existe $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ telle que $xS = T$.
3. Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ telle que $xu = 0$.
   (a) Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ telle que $\phi(0) \neq 0$. Démontrer qu'il existe une constante C_ϕ telle que pour toute fonction $\eta \in D(\mathbb{R}^2)$ égale à 1 sur le support de ϕ $C_\phi =< u, \eta >$.
   (b) Montrer que si $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ telle que $\psi(0) \neq 0$ alors $C_\phi = C_\psi$.
   (c) En déduire toutes les solutions de $xT = 0$.
4. Résoudre dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ les équations suivantes: $xT = 1, \qquad xT = \delta_0, \qquad xT = \mathrm{vp}(\frac{1}{x})$.
5. Résoudre dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$: $xT' + T = 0$.
6. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Montrer que $\sin(x)T = 0$ si et seulement s'il existe une suite (c_n) telle que $T = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\delta_{n\pi}$.

Exercice 12

Soit $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $< T, \phi >= \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \phi(x, -x)dx$.

1. Démontrer que T est une distribution sur $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer le support de T. En déduire qu'il n'existe pas de fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ telle que T soit la distribution associée à cette fonction.
3. Calculer $\dfrac{\partial T}{\partial x} - \dfrac{\partial T}{\partial y}$.