Feuille de TD 1
Quelques exercices préparatoires

Exercice 1

1. On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Démontrer que l'intégrale impropre $\int_0^\infty f(x)\,dx$ converge mais que $f \notin L^1(]0,\infty[)$.
2. Soit la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha |lnx|^\beta}$. Étudier l'appartenance de f à $L^1(I)$ en fonction des réels α et β pour l'intervalle I étant successivement $]0,1/2], [1/2,1[, [2,\infty[$.

Exercice 2

Montrer que la fonction χ définie sur $\mathbb{R}^N$ par

$$\chi(x) = e^{-\frac{|x|^2}{1-|x|^2}} \text{ si } |x| < 1, \quad \chi(x) = 0 \text{ si } |x| \geq 1$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^N$.

Exercice 3

Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite quelconque de nombres réels et soit χ une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\chi|_{[-1,1]} = 1, \qquad \mathrm{supp}(\chi) \subset [-2,2].$$

1. Montrer qu'il existe une suite $(\epsilon_n)_{n\geq 0}$ de réels positifs tendant vers 0 telle que la série
$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} \chi\left(\frac{x}{\epsilon_n}\right)$$
définisse une fonction f de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que pour toute suite $(a_n)_{n\geq 0}$ de nombres réels, il existe une fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ telle que
$$f^{(n)}(0) = a_n \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$
3. Interpréter le résultat.

Exercice 4

Soit les deux fonctions f, g définies sur $\mathbb{R}$ de classe C^1, bornées et de dérivées bornées. On suppose que f et g' sont dans $L^1(\mathbb{R})$. Montrer que la fonction $f * g$ est bien définie et qu'elle est de classe C^2.

Exercice 5

1. Soit a, b deux réels avec $a < b$ et soit $f \in L^\infty([a,b])$. Démontrer que
$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$$
2. Soit une partie $D \subset \mathbb{R}^N$ de mesure bornée et $f \in L^\infty(D)$. Alors pour $1 \leq p \leq \infty$ on a $f \in L^p(D)$ et
$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

Exercice 6

Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

1. Démontrer que pour $p \in [1, \infty[$ on a $f \in L^p[\mathbb{R}^d)$ avec l'estimation
$$\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1}^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^\infty}^{1-\frac{1}{p}}.$$
2. Démontrer que pour tout $\alpha > 0$ on a
$$\alpha^p \mu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d; |f(x)| \geq \alpha\right\}\right) \leq \|f\|_{L^p}^p$$
où μ désigne la mesure de Lebesgue.
3. Démontrer que
$$\lim_{p \to \infty} \|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^\infty}.$$

Exercice 7

Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ avec $p \in [1, \infty[$. Pour $h \in \mathbb{R}^d$, on note $\tau_h f$ la fonction
$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \qquad (\tau_h f)(x) := f(x - h).$$

1. Montrer que τ_h est une isométrie linéaire de $L^p(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même.
2. Montrer que
$$\lim_{h \to 0} \|\tau_h f - f\|_{L^p} = 0.$$
3. Est-ce que le résultat reste vrai pour $p = \infty$?

Exercice 8

Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$ avec $p, q \in [1, \infty]$ conjugués.

1. Vérifier que la convolée
$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(t) g(x - t)\, dt$$
est une fonction définie partout et bornée sur $\mathbb{R}^N$ avec
$$\|f * g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$
2. Vérifier que la convolée $f * g$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^N$.

Exercice 9

Soit $A \in \mathbb{R}^N$ mesurable et de mesure de Lebesgue strictement positive. Montrer que $A - A = \{x - y \mid x, y \in A\}$ est un voisinage de 0. *Indication : on pourra considérer le produit de convolution des fonctions f et $\tilde{f}$ avec $f(x) = \mathbf{1}_{|A}(x)$ et $\tilde{f}(x) = f(-x)$.*

Exercice 10

Soit $(K_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant :
$$(i) \int_{\mathbb{R}} K_n(x)\, dx = 1, \qquad (ii) \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \int_{\mathbb{R}} |K_n(x)|\, dx < \infty, \qquad (iii)\, \forall \delta > 0, \quad \lim_{n \to \infty} \int_{|x| \geq \delta} |K_n(x)|\, dx = 0.$$

1. Montrer que pour tout $f \in L^p(\mathbb{R})$ avec $p \in [1, \infty[$ on a
$$\lim_{n \to \infty} \|K_n * f - f\|_{L^p} = 0.$$
2. Soit les fonctions
$$K(x) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2 \qquad \text{et} \qquad K_n(x) = nK(nx).$$
Montrer que la famille $(K_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifie les trois conditions $(i), (ii)$ et (iii).
3. Montrer que
$$K(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} (1 - |\xi|) e^{ix\xi}\, d\xi.$$
4. Montrer que pour $f \in L^1(\mathbb{R})$
$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{n} (1 - |\xi|/n) \widehat{f}(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi \qquad \text{au sens } L^1(\mathbb{R}).$$