Université de Rennes 1 Année 2019-2020
Magistère **Module DanF**

Feuille de TD: 1

Exercice 1.1. Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ avec $p \in [1,\infty[$. Pour $h \in \mathbb{R}^d$, on note par $\tau_h f$ la fonction

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad (\tau_h f)(x) := f(x-h).$$

1. Montrer que
$$\lim_{h\to 0} \|\tau_h f - f\|_{L^p} = 0.$$
2. Est-ce que le résultat reste vrai pour $p = \infty$?

Exercice 1.2. Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ une suite de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant

$$\textbf{i)} \quad \int_{\mathbb{R}} K_n(x)dx = 1, \quad \textbf{ii)} \quad \sup_{n\in\mathbb{N}^\star} \int_{\mathbb{R}} |K_n(x)|dx < \infty, \quad \textbf{iii)} \quad \forall \delta > 0, \quad \lim_{n\to\infty} \int_{|x|\geq\delta} |K_n(x)|dx = 0.$$

1. Montrer que pour tout $f \in L^p(\mathbb{R})$ avec $p \in [1,\infty[$, alors
$$\lim_{n\to\infty} \|K_n * f - f\|_{L^p} = 0.$$
2. Soit $K(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2$ et $K_n(x) = nK(nx)$. Montrer que la famille $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ vérifie les conditions **i**), **ii**) et **iii**).
3. Montrer que
$$K(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1} (1-|\xi|)e^{ix\xi}d\xi.$$
4. Montrer la convergence suivante dans $L^1(\mathbb{R})$:
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-n}^{n} (1-|\xi|/n)\widehat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi.$$

Exercice 1.3. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

1. Montrer que pour tout $p \in [1,\infty[$ on a $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et
$$\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1}^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^\infty}^{1-\frac{1}{p}}.$$
2. Montrer que pour tout $\alpha > 0$ on a
$$\alpha^p \mu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^d, |f(x)| \geq \alpha\right\}\right) \leq \|f\|_{L^p}^p,$$
avec μ la mesure de Lebesgue.

3. Prouver que
$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^\infty}.$$

Exercice 1.4. Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^d), g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

1. Montrer que le produit de convolution $f * g \in L^\infty$ et que
$$\|f * g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^\infty}.$$
2. Montrer que $f * g$ est continue.
3. Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ une partie mesurable de mesure finie strictement positive. On définit
$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad h(x) = (\mathbf{1}_{-A} * \mathbf{1}_A)(x).$$
Montre que h est continue et que $h(0) > 0$.
4. En déduire que l'ensemble $A - A := \Big\{x - y, x, y \in A\Big\}$ contient un voisinage de zéro.

Exercice 1.5. Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\|x\|^2-1}}, & |x| < 1 \\ \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe C^∞.
2. Montrer qu'il existe une fonction $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante, C^∞ et vérifiant
$$\theta_{|\mathbb{R}^-} = 0; \quad \theta_{|[1,\infty[} = 1.$$
3. Soient K un compact non vide contenu dans un ouvert U de $\mathbb{R}^d$. Montrer qu'il existe $F \in \mathcal{C}_0^\infty(U)$ telle que
$$F(x) = 1, \quad \forall x \in K.$$
4. Soient K_1 et K_2 deux compacts non vides et disjoints de $\mathbb{R}^d$ et f_1, f_2 deux fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$. Montrer qu'il existe une fonction $g \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ telle que
$$g_{|K_1} \equiv f_1; \quad g_{|K_2} \equiv f_2.$$

Exercice 1.6. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^{m+1}(\mathbb{R}^d)$ et s'annulant en 0. Montrer qu'il existe une famille de fonctions $\{f_i\}_{i=1}^d$ de classe $\mathcal{C}^m(\mathbb{R}^d)$ telle que
$$f(x) = \sum_{i=1}^d x_i f_i(x), \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^d.$$

Exercice 1.7. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$. Montrer qu'il existe deux fonctions positives $f_1, f_2 \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ telles que
$$f = f_1 - f_2.$$
Démontrer le même résultat en remplaçant $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ par $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$.