Université de Rennes I Année 2019-2020
M1 **DanF**

Cours du 06/04/2020 - Corrigé

La référence de base est toujours le cours de F. Golse.

• Finir l'étude du Paragraphe 5.7. Les Théorèmes 5.7.5 (de plongement) et 5.7.6 (de trace) sont à comprendre avec leurs preuves (qui sont délicates).

• Lire et comprendre le Paragraphe 7.1. La notion de *solution élémentaire* (Définition 7.1.3) et le Théorème 7.1.4 (sur la *résolution des EDPs*) sont importants, et donc à connaître.

I. Faire l'exercice 22 (sur le *principe d'incertitude d'Heisenberg*) accessible à cette adresse. Essayer d'abord seul, puis avec l'indication, et enfin avec le corrigé (si besoin). Pour ceux qui veulent aller plus loin, écouter cette vidéo et lire l'article à ce propos sur Wikipédia, puis faire le lien avec l'exercice (où chaque intégrale de la fonction d'onde φ peut s'interpréter comme un écart type, de la position et de la vitesse).

Correction déjà accessible sur le lien.

II. On se place sur $\mathbb{R}$. Calculer la transformée de Fourier de la fonction $f(x) = e^{-|x|}$, et en déduire une solution élémentaire $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ de l'opérateur différentiel $P(D) := 1 - \partial^2_{xx}$.

Un calcul direct fournit :

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} e^{(1-i\xi)x}\, dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-(1+i\xi)x}\, dx = \frac{1}{1-i\xi} + \frac{1}{1+i\xi} = \frac{2}{1+\xi^2}.$$

Par définition, une solution élémentaire de $1 - \partial^2_{xx}$ est une distribution $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ qui vérifie :

$$(1 - \partial^2_{xx})E = \delta_0.$$

Après transformation de Fourier, cette condition devient :

$$(1 + \xi^2)\hat{E}(\xi) = 1.$$

On en déduit la relation $\hat{E}(\xi) = 2\hat{f}(\xi) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, c'est-à-dire après transformation de Fourier inverse $E = 2f$.