

# ANALYSE II

## Première séance

C. CHEVERRY et S. LEBORGNE

### Table des matières

<b>1 Motivations</b>	<b>2</b>
1.1 Calcul d'une longueur : le périmètre du cercle . . . . .	2
1.2 Calcul de l'aire d'une surface plane . . . . .	3
1.3 Briques élémentaires . . . . .	4
1.4 Quelques rappels . . . . .	7
1.5 Trois exemples pratiques . . . . .	8
1.5.1 L'aire $\mathcal{A}$ du disque . . . . .	8
1.5.2 L'aire du triangle . . . . .	10
1.5.3 L'aire délimitée par une parabole . . . . .	11
1.5.4 L'aire de la sphère . . . . .	13
1.5.5 Triangles et polygones géodésiques tracés sur la sphère . . . . .	14
1.5.6 Formule d'Euler-Poincaré . . . . .	15

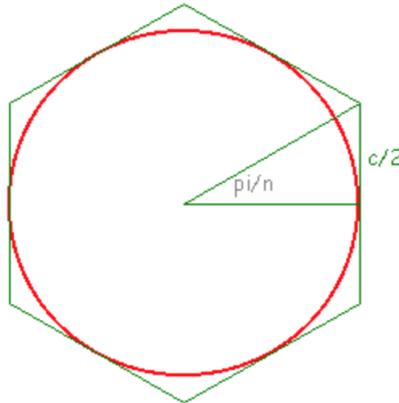
# Introduction

## 1 Motivations

Les procédés d'intégration sont principalement motivés par le calcul de longueurs (de courbes), d'aires (de surfaces) et de volumes (parties de l'espace).

### 1.1 Calcul d'une longueur : le périmètre du cercle

On peut considérer que la longueur d'une courbe est la limite des longueurs de lignes brisées qui approchent bien la courbe. Dans le cas d'un cercle de rayon  $R$  et de périmètre  $P$ , c'est la [méthode d'Archimède](#). On approche le cercle par une suite de polygones réguliers à  $n$  côtés (où  $n$  est un entier non nul) inscrits ou circonscrits au cercle. Les côtés de ces polygones sont des segments (*briques élémentaires*) dont on peut calculer les longueurs. Plus précisément, notons  $2\pi$  l'angle complet (correspondant à 360 degrés). Le polygone sépare  $2\pi$  en  $n$  angles égaux, chacun valant  $2\pi/n$ . L'angle dessiné ci-dessous s'obtient en divisant de nouveau par deux ce qui donne  $\pi/n$ .



Par définition, on a

$$\tan(\pi/n) = \frac{c_n/2}{R}, \quad c_n = 2R \tan(\pi/n).$$

On peut identifier la longueur  $P_n^+$  du polygone (en vert). On a en effet  $P \leq P_n^+ = nc_n$  (la minoration étant visible par projection du polygone sur le cercle). Ensuite, par *passage à la limite* (on s'attend à gagner en précision lorsque  $n$  grandit), on récupère

$$P \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n^+ = \lim_{n \rightarrow +\infty} nc_n = 2\pi \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(\pi/n)}{\pi/n} \right) \left( \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\cos(\pi/n)} \right) = 2\pi$$

où on a utilisé

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\cos 0} = 1.$$

Pour compléter ce procédé, on peut aussi calculer les longueurs  $P_n^-$  des polygones réguliers qui sont inscrits dans le cercle. On dispose de l'encadrement  $P_n^- \leq P \leq P_n^+$ . Et, sous réserve de pouvoir prouver (c'est à peine plus compliqué que ci-dessus) que les  $P_n^-$  convergent vers  $2\pi$ , on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n^- = 2\pi \leq P \leq 2\pi = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n^+ \implies \boxed{P = 2\pi}.$$

*Remarque.* Le théorème de Thalès montre facilement que les longueurs  $P_n$  des polygones circonscrits sont proportionnelles au rayon du cercle. La limite de ces longueurs, c'est-à-dire le périmètre  $P$  du cercle, l'est donc aussi. Cela fournit une autre définition de  $\pi$  comme le *coefficient de proportionnalité* entre le diamètre  $D$  d'un cercle et son périmètre, selon la formule  $P = \pi D$  (ou  $P = 2\pi R$  si on travaille avec le rayon).  $\circ$

Il est instructif de repérer les outils mis en jeu ci-dessus. Les mots clé sont :

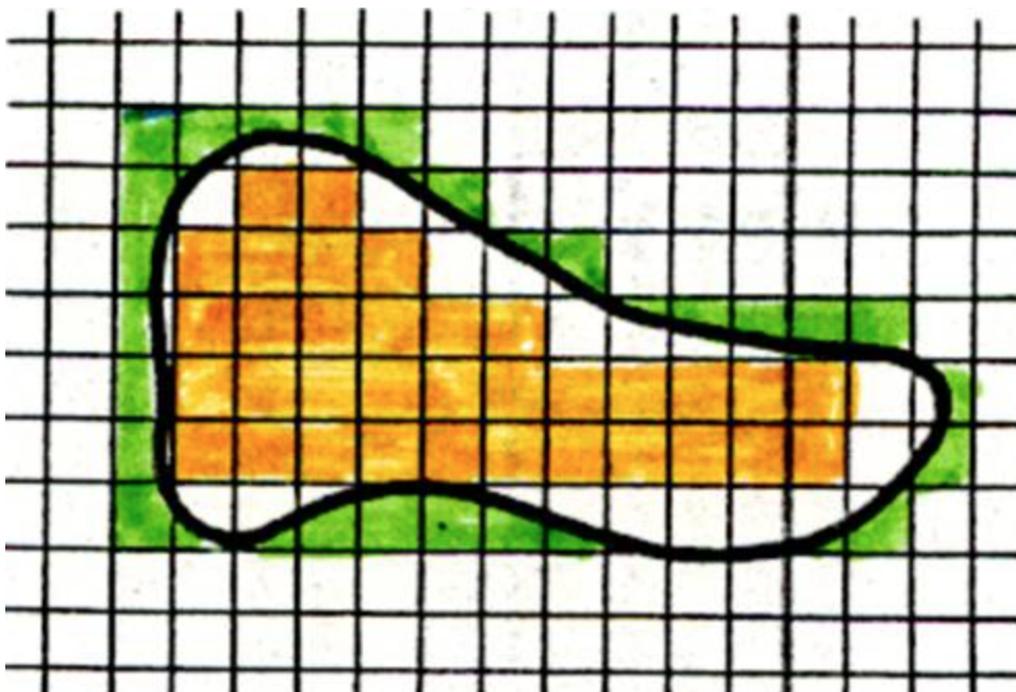
*briques élémentaires*                      *encadrement*                      *passage à la limite*

On va les retrouver dans le paragraphe suivant consacré aux aires.

## 1.2 Calcul de l'aire d'une surface plane

Considérons une surface plane qui est délimitée par une courbe et dont l'aire vaut  $\mathcal{A}$ . On peut lui appliquer un quadrillage du plan formé de carrés dont les côtés sont de même longueur égale à  $1/n$ . On note (en orange sur le dessin)

$$\mathcal{A}_n^- := \sum \text{aires des carrés inclus} = \frac{J_n^-}{n^2} \quad \text{avec } J_n^- \text{ le nombre de tels carrés.}$$



On peut aussi comptabiliser les carrés (signalés en vert sur le dessin précédent)

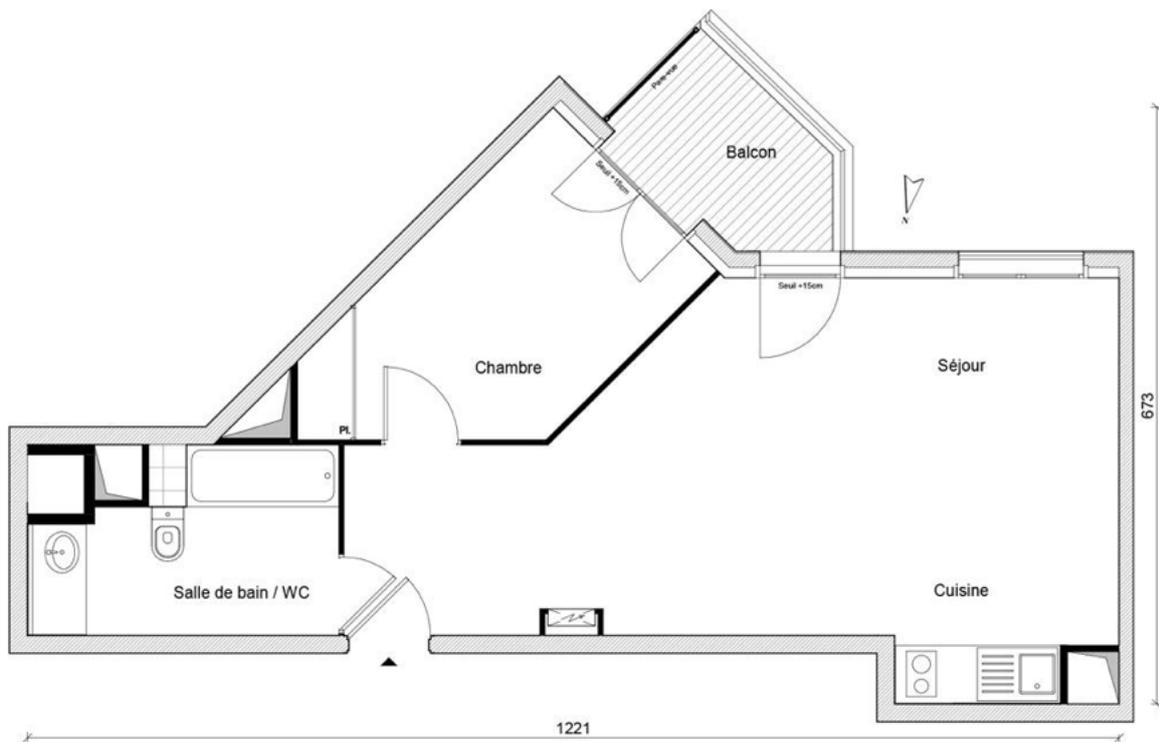
$$\mathcal{A}_n^+ := \sum \text{aires des carrés coupant la surface} = \frac{J_n^+}{n^2} \quad \text{avec } J_n^+ \text{ le nombre de tels carrés.}$$

Les *briques élémentaires* sont ici les carrés, l'*encadrement* n'est autre que  $\mathcal{A}_n^- \leq \mathcal{A} \leq \mathcal{A}_n^+$ , et le *passage à la limite* ( $n \rightarrow +\infty$ ) permet de gagner en précision. On s'attend ainsi à pouvoir récupérer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_n^- = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_n^+ = \mathcal{A}.$$

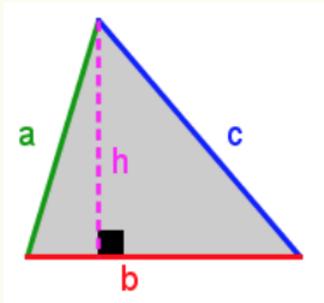
### 1.3 Briques élémentaires

Le choix des carrés n'est pas forcément toujours le plus pertinent. Par exemple, cherchons à calculer le périmètre ou la surface de l'appartement dont le plan est fourni ci-dessous



Pour cela, il est préférable d'avoir recours à une partition impliquant des carrés mais aussi des rectangles et des triangles (penser au jeu des [tangrams](#)). D'où l'importance de connaître par coeur le calcul du périmètre  $P$  et de l'aire  $A$  d'un triangle, d'un carré et d'un rectangle.

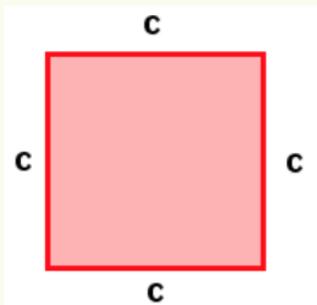
Figure

Périmètre  $P$ Aire  $A$ **Triangle**

$$P = a + b + c$$

$$A = \frac{b \times h}{2}$$

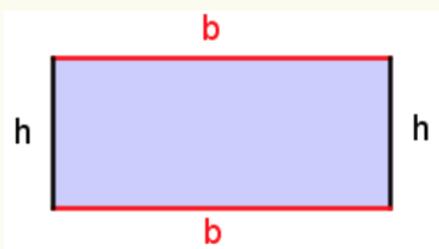
$b$  = mesure de la base  
 $h$  = mesure de la hauteur

**Carré**

$$P = c + c + c + c \\ = 4c$$

$$A = c \times c = c^2$$

$c$  = mesure d'un côté

**Rectangle**

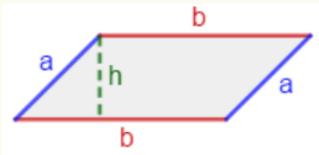
$$P = b + b + h + h \\ = 2b + 2h \\ = 2(b + h)$$

$$A = b \times h$$

$b$  = mesure de la base  
 $h$  = mesure de la hauteur

A partir de ces ingrédients de base, on peut calculer le périmètre  $P$  et l'aire  $A$  de figures plus compliquées comme les parallélogrammes, les losanges, les trapèzes ou les polygones.

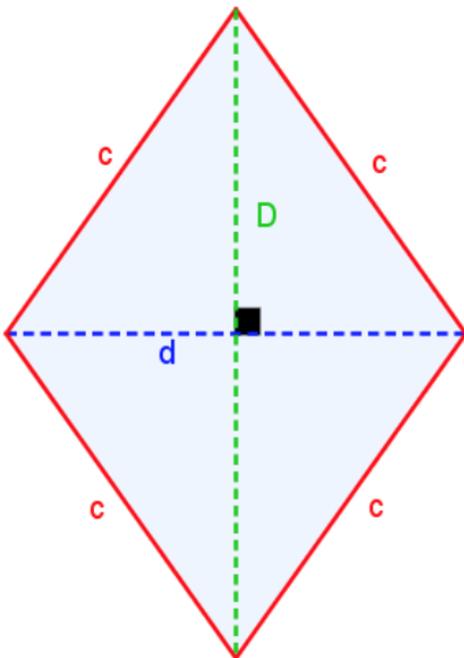
Figure

Périmètre  $P$ Aire  $A$ **Parallélogramme**

$$\begin{aligned} P &= a + a + b + b \\ &= 2a + 2b \\ &= 2(a + b) \end{aligned}$$

$$A = b \times h$$

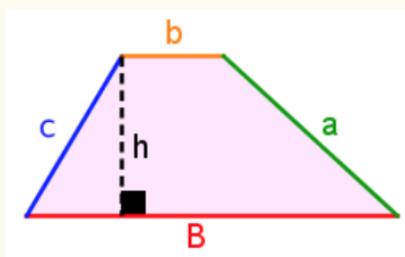
$b$  = mesure de la base  
 $h$  = mesure de la hauteur

**Losange**

$$\begin{aligned} P &= c + c + c + c \\ &= 4c \end{aligned}$$

$$A = \frac{D \times d}{2}$$

$D$  = mesure de la grande diagonale  
 $d$  = mesure de la petite diagonale

**Trapèze**

$$P = b + a + B + c$$

$$A = \frac{(b + B) \times h}{2}$$

$b$  = mesure de la petite base  
 $B$  = mesure de la grande base  
 $h$  = mesure de la hauteur

## 1.4 Quelques rappels

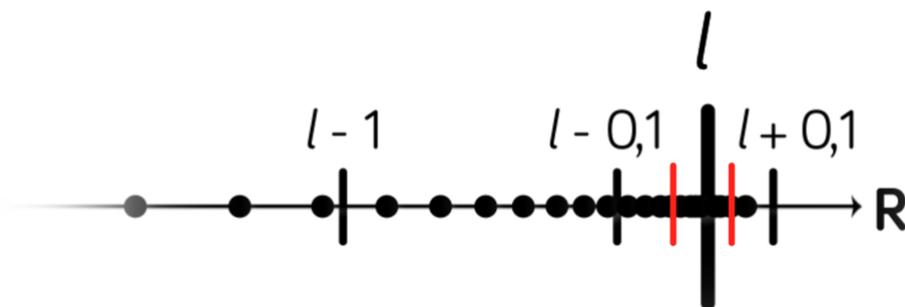
Dans ce qui suit, on suppose connues et maîtrisées les notions du programme de terminal exposées par exemple dans ce [cours](#) et résumées dans cette [synthèse](#).

On a vu précédemment qu'il était nécessaire pour le calcul de longueurs, d'aires, ... de recourir à des approximations de plus en plus précises, susceptibles de donner une réponse à l'infini. Cela signifie que nous devons utiliser des suites qui convergent. Une suite  $(u_n)_n$  est une liste de nombres (réels dans la pratique mais on pourrait aussi mettre en jeu des nombres complexes ou des vecteurs) indexés par des entiers  $n$  (typiquement choisis dans  $\mathbb{N}$  ou dans un sous-ensemble de  $\mathbb{N}$ ).

**Définition 1.1.** On dit de la suite  $(u_n)_n$  qu'elle converge vers le nombre  $\ell \in \mathbb{R}$  (appelé *limite de la suite*) si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}; \quad \forall n \geq N, \quad |u_n - \ell| \leq \epsilon.$$

Autrement dit, à partir d'un certain rang ( $N$ ), tous les termes de la suite doivent être dans l'intervalle  $[\ell - \epsilon, \ell + \epsilon]$  (ci-dessous avec  $\epsilon = 0,1$ )



On peut étendre la définition 1.1 aux cas  $\ell = \pm\infty$ . Ainsi, on dit de la suite  $(u_n)_n$  qu'elle converge vers  $+\infty$  si et seulement si

$$\forall M \in \mathbb{R}_+, \quad \exists N \in \mathbb{N}; \quad \forall n \geq N, \quad M \leq u_n.$$

A l'opposé, on dit de la suite  $(u_n)_n$  qu'elle est majorée lorsque

$$\exists M \in \mathbb{R}; \quad \forall n, \quad u_n \leq M,$$

et qu'elle est minorée lorsque

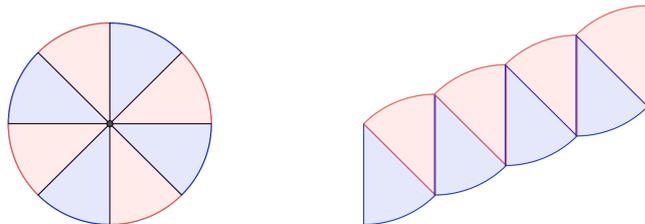
$$\exists m \in \mathbb{R}; \quad \forall n, \quad m \leq u_n.$$

Si les suites  $(u_n)_n$  et  $(v_n)_n$  convergent vers  $\ell$  et  $\ell'$ , alors la suite  $(\alpha u_n + \beta v_n)_n$  obtenue par combinaison linéaire (avec des coefficients réels  $\alpha$  et  $\beta$  fixes) converge vers  $\alpha\ell + \beta\ell'$ . Ces différents points sont rappelés dans ce [cours](#) de niveau terminal.

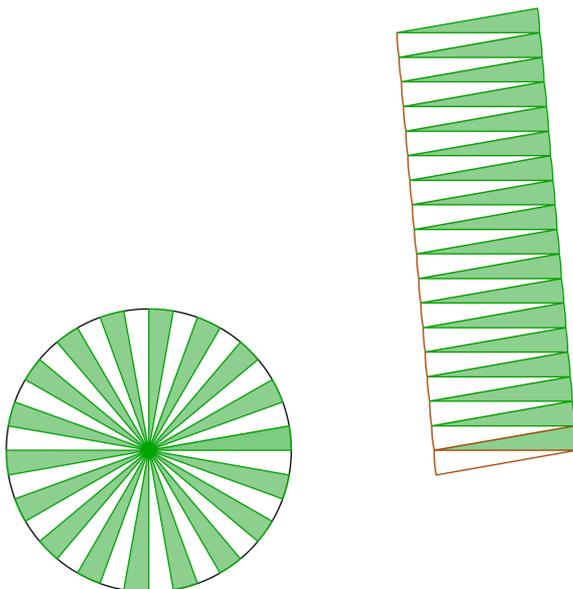
## 1.5 Trois exemples pratiques

### 1.5.1 L'aire $\mathcal{A}$ du disque

A) *Méthode par découpage.* Prenons un disque de rayon  $R$ . Découpons le en  $n$  quartiers égaux (comme une galette des rois) et ré-arrangeons les. Ci-dessous pour le cas  $n = 8$  :



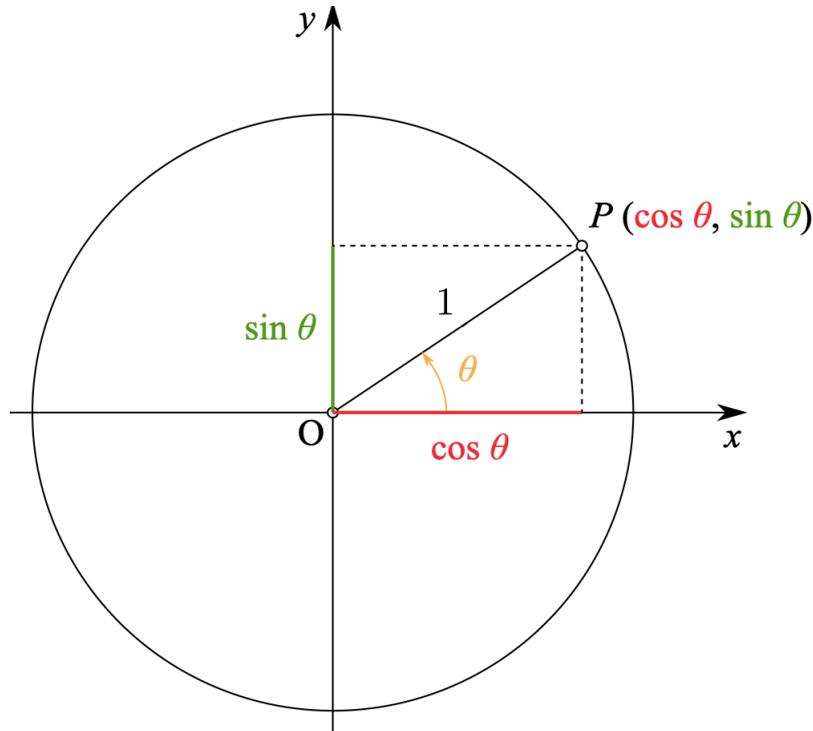
Et ci-dessous pour le cas  $n = 36$  :



Les parties colorées en vert et en blanc dans le cercle qui borde le disque (sa frontière) sont de même longueur  $l$ . On a donc  $P = 2l$  et ainsi  $l = P/2 = \pi D/2 = \pi R$ . Lorsqu'on augmente le nombre  $n$  de parts, la figure ré-arrangée se met à ressembler de plus en plus à un rectangle (sans en être un à proprement parler : certains bords sont formés d'arcs de cercles de rayons de plus en plus grands ; il sont donc de plus en plus voisins de segments). A la limite, on voit se former un rectangle de côtés  $R$  et  $l = \pi R$ . La figure gardant (pour tout  $n$ ) la même aire que le disque, on peut en déduire que le disque a une aire égale à :

$$\mathcal{A} = R \times (\pi R) = \boxed{\pi R^2}.$$

**B) Méthodes par intégration.** On peut retrouver le résultat précédent grâce au calcul intégral. Pour simplifier, on raisonne ci-dessous avec  $R = 1$ .



Pour  $\theta \in [0, \pi/2]$ , l'abscisse du point  $P$  est  $x = \cos \theta$  tandis que son ordonnée est (souvenir de Pythagore)

$$y \equiv y(x) = \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sin \theta.$$

L'aire du disque est quatre fois celle du quart de disque. On peut donc se contenter de faire varier  $x$  entre 0 et 1. Lorsqu'on fait varier  $x$  de manière infinitésimale (disons de  $x$  à  $x + h$  avec  $h \simeq dx \ll 1$ ), on dessine un rectangle de base  $dx$  et de hauteur  $y(x)$ , dont l'aire est  $y(x)dx$ . Le procédé de sommation (par tranches) de ces aires est représenté par le signe intégral " $\int$ ". On trouve ainsi

$$\mathcal{A} = 4 \sum y(x)dx = 4 \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx.$$

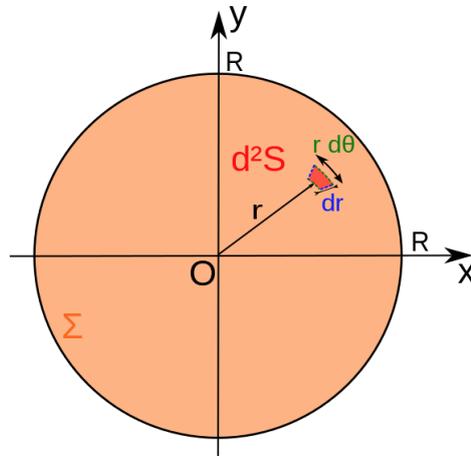
Pour calculer de manière analytique ce que cela donne, on effectue le changement de variables  $x = \sin(t)$  suivant les règles

$$y(x) = \sqrt{1 - \sin^2 t} = \cos t, \quad dx = \sin' t dt = \cos t dt, \quad t \in [0, \pi/2].$$

D'où il ressort que :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= 4 \int_0^{\pi/2} \cos(t) \cos(t) dt \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt \\ &= 2(\pi/2 - 0) + [\sin(2\pi/2) - \sin 0]/4 = \pi.\end{aligned}$$

On peut aussi utiliser les coordonnées polaires suivant lesquelles  $(x, y) = r(\cos \theta, \sin \theta)$  avec  $r \in \mathbb{R}_+$  et  $\theta \in [0, 2\pi]$ . L'élément d'aire est alors  $(r dr) d\theta$  comme on le devine ci-dessous



Après sommation, cela conduit à

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_{\{x^2+y^2 \leq R^2\}} dx dy \\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} r dr d\theta = \left( \int_0^R r dr \right) \left( \int_0^{2\pi} d\theta \right) \\ &= (R^2/2) (2\pi) = \pi R^2.\end{aligned}$$

Dans ce paragraphe B), on a remplacé les briques élémentaires (dont les tailles étaient bien déterminées) par des *briques infinitésimales* (de taille évanescente) qui elles aussi peuvent avoir des formes diverses représentées par les différents accroissements d'aires

$$\sqrt{1-x^2} dx, \quad \cos^2(t) dt, \quad dx dy, \quad r dr d\theta.$$

### 1.5.2 L'aire du triangle

On considère un triangle rectangle isocèle déterminé par la longueur de ses cathètes (les deux côtés adjacents à l'angle droit) fixée à 1. Son aire  $\mathcal{A}$ , on l'a vu, vaut  $\mathcal{A} = 1/2$ .

Même si cela peut paraître saugrenu (quoique ?), on va recalculer cette aire par un procédé d'approximation similaire à ceux évoqués précédemment. Dans un repère orthonormé, les trois côtés sont donnés par

$$\begin{aligned} &\{(x, 0); 0 \leq x \leq 1\}, && \text{segment horizontal,} \\ &\{(1, y); 0 \leq y \leq 1\}, && \text{segment vertical,} \\ &\{(x, x); 0 \leq x \leq 1\}, && \text{hypothénuse.} \end{aligned}$$

Pour  $j \in \{0, \dots, n-1\}$ , on dessine le rectangle

$$R_j := \left\{ (x, y); \frac{j}{n} \leq x \leq \frac{j+1}{n}, 0 \leq y \leq \frac{j}{n} \right\}$$

dont l'aire vaut

$$\mathcal{R}_j = \left( \frac{j+1}{n} - \frac{j}{n} \right) \times \frac{j}{n} = \frac{j}{n^2}.$$

Ces rectangles sont disjoints deux à deux et tous contenus dans le triangle. La somme  $\mathcal{A}_n$  de leurs aires ne peut donc qu'être inférieure à celle du triangle :

$$\mathcal{A}_n = \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{R}_j = \frac{1}{n^2} \left( \sum_{j=0}^{n-1} j \right) = \frac{s_n}{n^2} \leq \mathcal{A}, \quad s_n := \sum_{j=0}^{n-1} j.$$

Pour déterminer la somme  $s_n$  (formée de  $n-1$  termes), on exploite l'astuce suivante

$$\begin{array}{rcccccccc} s_n & = & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots + & (n-2) & + & (n-1) \\ + & s_n & = & (n-1) & + & (n-2) & + & (n-3) & + & \cdots + & 2 & + & 1 \\ \hline 2s_n & = & n & + & n & + & n & + & \cdots + & n & + & n \end{array}$$

C'est imparable. On trouve

$$s_n = \frac{n(n-1)}{2}, \quad \mathcal{A}_n = \frac{s_n}{n^2} = \frac{(1-1/n)}{2} \longrightarrow \mathcal{A} = \frac{1}{2}.$$

C'est aussi cohérent : l'aire des parties non couvertes par les rectangles s'amenuise jusqu'à zéro lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . On retrouve la valeur (bien connue) de  $\mathcal{A}$ .

### 1.5.3 L'aire délimitée par une parabole

On reprend ici la démarche effectuée ci-dessus mais cette fois-ci avec l'aire (qui est toujours notée  $\mathcal{A}$ ) délimitée par les axes de coordonnées et une parabole d'équation  $y = x^2$ . La surface se trouve ainsi encadrée par

$$\begin{aligned} &\{(x, 0); 0 \leq x \leq 1\}, && \text{segment horizontal,} \\ &\{(1, y); 0 \leq y \leq 1\}, && \text{segment vertical,} \\ &\{(x, x^2); 0 \leq x \leq 1\}, && \text{parabole.} \end{aligned}$$

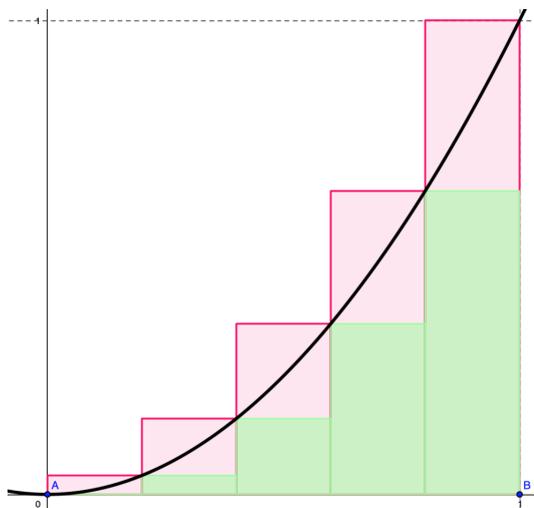
Pour  $j \in \{0, \dots, n - 1\}$ , on dessine le rectangle

$$R_j := \left\{ (x, y) ; \frac{j}{n} \leq x \leq \frac{j+1}{n}, 0 \leq y \leq \frac{j^2}{n} \right\}$$

dont l'aire vaut

$$\mathcal{R}_j = \left( \frac{j+1}{n} - \frac{j}{n} \right) \times \frac{j^2}{n} = \frac{j^2}{n^3}.$$

Ces rectangles (marqués en vert pour  $n = 5$  ci-dessous) sont disjoints deux à deux et tous contenus dans notre nouvelle surface (un autre choix serait d'ajouter les rectangles coloriés en rose et de procéder par majoration).



La somme  $\mathcal{A}_n$  des aires vertes ne peut qu'être inférieure à celle de l'aire de notre surface :

$$\mathcal{A}_n = \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{R}_j = \frac{1}{n^3} \left( \sum_{j=0}^{n-1} j^2 \right) = \frac{s_n}{n^3} \leq \mathcal{A}, \quad s_n := \sum_{j=0}^{n-1} j^2.$$

Pour déterminer la somme  $s_n$  (formée de  $n - 1$  termes), on commence par remarquer que

$$(n + 1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1, \quad (n + 1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1.$$

On exploite cette fois-ci l'astuce des [sommes télescopiques](#)

$$\begin{array}{rccccccc}
 n^3 - (n - 1)^3 & = & 3(n - 1)^2 & + & 3(n - 1) & + & 1 \\
 + (n - 1)^3 - (n - 2)^3 & = & 3(n - 2)^2 & + & 3(n - 2) & + & 1 \\
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 + 2^3 - 1^3 & = & 3 \times 1^2 & + & 3 \times 1 & + & 1 \\
 + 1^3 - 0^3 & = & 3 \times 0^2 & + & 3 \times 0 & + & 1 \\
 \hline
 n^3 & = & 3(1^2 + \dots + (n - 1)^2) & + & 3(1 + \dots + (n - 1)) & + & n
 \end{array}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} 1^2 + \dots + (n-1)^2 &= \frac{n^3 - n}{3} - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)(n+1)}{6} - \frac{n(n-1)}{2} \\ &= n(n-1) \left( \frac{n+1}{3} - \frac{1}{2} \right) = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} \end{aligned}$$

et du coup, l'aire des parties non couvertes par les rectangles s'amenuisant jusqu'à zéro lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , on récupère

$$A_n = \frac{s_n}{n^3} = \frac{(1 - 1/n)(2 - 1/n)}{6} \rightarrow \mathcal{A} = \frac{1}{3}.$$

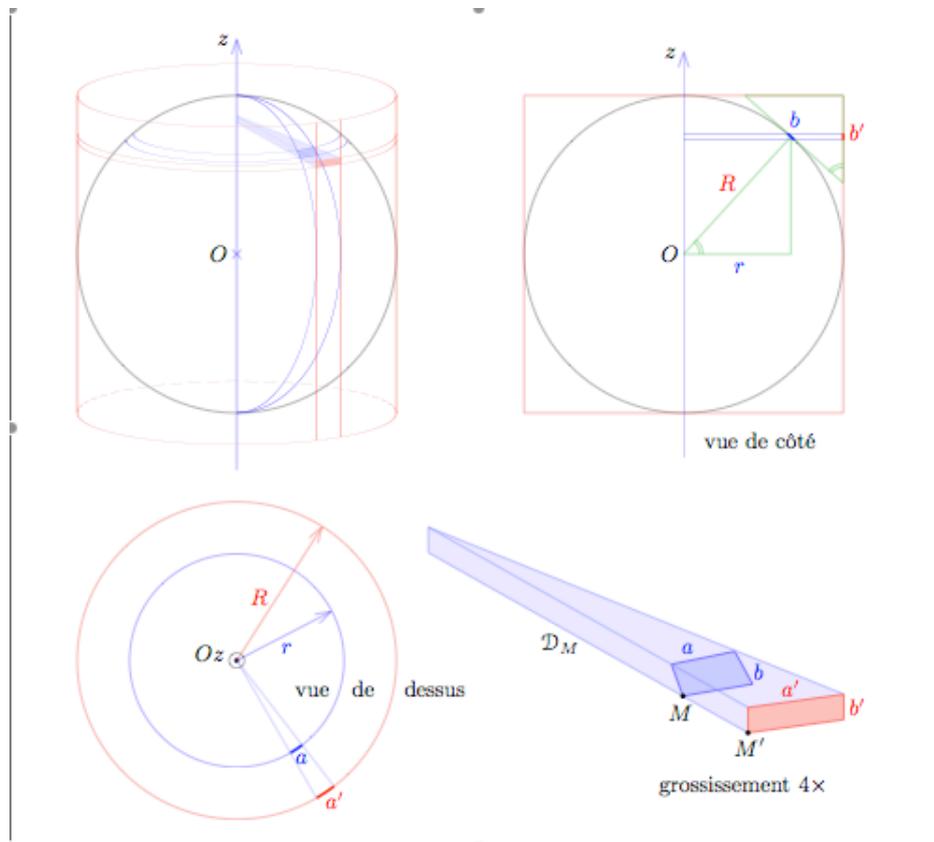
On peut croiser ce résultat par un calcul de primitive

$$\mathcal{A} = \int_0^1 x^2 dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \left( \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} \right) = \frac{1}{3}.$$

#### 1.5.4 L'aire de la sphère

En guise de complément (facultatif), on explique ici comment faire avec des surfaces non planes et en quoi cela peut complètement modifier l'intuition qu'on peut avoir.

**A) Un calcul par intégration.** Représentation d'un élément de surface sur la sphère :



On peut calculer l'aire de la demi-sphère  $S_+ = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0\}$  en utilisant la représentation paramétrée  $f(u, v) = (a \cos u \cos v, a \sin u \cos v, a \sin v)$ . L'application

$$f : [0, 2\pi[ \times [0, \pi/2[ \rightarrow \mathbb{R}^3 : (u, v) \mapsto (a \cos u \sin v, a \sin u \sin v, a \cos v)$$

définit un paramétrage régulier bijectif de la demi-sphère privée du point  $(0, 0, a)$ . La formule donnant l'aire d'une nappe paramétrée s'écrit

$$\text{Aire}(S_+) = \iint_{[0, 2\pi[ \times [0, \pi/2[} \left\| \frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v} \right\| dudv.$$

On a

$$\frac{\partial f}{\partial u} = (-a \sin u \sin v, a \cos u \sin v, 0), \quad \frac{\partial f}{\partial v} = (a \cos u \cos v, a \sin u \cos v, -a \sin v),$$

donc

$$\frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v} = (-a^2 \cos u \sin^2 v, -a^2 \sin u \sin^2 v, -a^2 \sin v \cos v),$$

et

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial u} \wedge \frac{\partial f}{\partial v} \right\| = a^2 \sin v.$$

On en déduit

$$\text{Aire}(S_+) = \iint_{[0, 2\pi[ \times [0, \pi/2[} a^2 \sin v dudv = a^2 \left( \int_0^{2\pi} du \right) \left( \int_0^{\pi/2} \sin v dv \right) = 2\pi a^2.$$

Pour la sphère entière on trouve  $4\pi a^2$  (car  $v$  varie de 0 à  $\pi$ ).

Considérons deux plans sécants au centre de la sphère. Ils délimitent quatre secteurs angulaires dans l'espace et quatre parties de la sphère. L'aire d'une telle partie est proportionnelle à l'angle des demi-plans la définissant. Comme elle vaut  $4\pi a^2$  pour un angle de  $2\pi$ , dans le cas d'un angle  $\alpha$  elle vaut  $2\alpha a^2$ . On peut aussi le voir avec le calcul intégral fait plus haut : au lieu d'intégrer entre 0 et  $2\pi$  pour  $u$  on intègre entre 0 et  $\alpha$ . Il faut remarquer ensuite que seul l'angle des plans définissant une telle portion de la sphère importe, pas leur orientation.

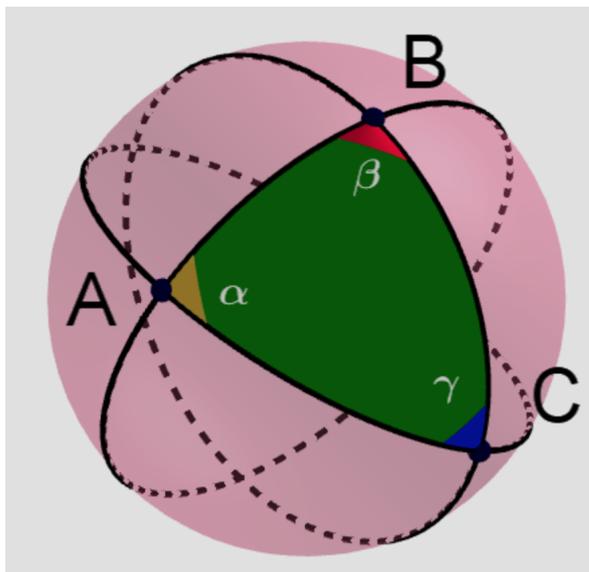
### 1.5.5 Triangles et polygones géodésiques tracés sur la sphère

On appelle géodésique d'une surface les courbes de longueurs minimales entre leurs points. Pour une sphère ces courbes géodésiques sont les grands cercles, c'est-à-dire ce sont les intersections de la sphère avec les plans passant par le centre de la sphère. En particulier, un triangle géodésique sur la sphère est un triangle dont les côtés sont formés de grands cercles de la sphère.

**Théorème 1.2.** (Girard) Soit  $ABC$  un triangle géodésique tracé sur la sphère de rayon  $R$  d'angles aux sommets  $\alpha, \beta, \gamma$ . Alors on a la relation suivante

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \mathcal{A}/R^2,$$

où  $\mathcal{A}$  désigne l'aire du triangle  $ABC$ .



La relation liant les angles d'un triangle du plan, à savoir  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$  doit donc être modifiée en prenant en compte la courbure (ici constante égale à  $R$ ) de la surface. Elle se retrouve comme cas limite (lorsque  $R$  tend vers l'infini).

Démonstration [Preuve](#) par l'image qui montre que les quartiers d'orange d'angles  $\alpha, \beta$  et  $\gamma$  dont les sommets sont ceux du triangle  $ABC$  recouvrent l'équivalent d'une demi-sphère plus deux fois le triangle  $ABC$ . On obtient donc  $2(\alpha + \beta + \gamma)R^2 = 2\pi R^2 + 2\mathcal{A}$  ce qui donne l'égalité souhaitée.  $\square$

**Corollaire 1.3.** Soit  $P$  un polygone géodésique à  $n$  côtés tracé sur la sphère,  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  les angles en ses sommets,  $\mathcal{A}$  son aire. On a :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = (n - 2)\pi + \mathcal{A}/R^2.$$

### 1.5.6 Formule d'Euler-Poincaré

De ce théorème on déduit la formule d'Euler-Poincaré pour un polyèdre convexe.

**Théorème 1.4.** Soit  $P$  un polyèdre convexe. On appelle  $s$  le nombre de ses sommets,  $a$  le nombre de ses arêtes,  $f$  le nombre de ses faces. On a :

$$a + 2 = f + s.$$

Démonstration Plaçons  $P$  à l'intérieur d'une sphère, le centre de la sphère étant à l'intérieur de  $P$ . Projetons ensuite  $P$  sur la sphère à partir du centre. Les faces  $F \in \mathcal{F}$  du polyèdre deviennent des polygones géodésiques. Notant  $\mathcal{S}_F$  l'ensemble des sommets qui sont rattachés à la face  $F$ ,  $\alpha_S$  les angles impliqués (pour décrire  $F$ ) et  $n_F$  le nombre de côtés de  $F$ , on a d'après le corollaire 1.3 :

$$R^2 \left( \sum_{\mathcal{S}_F} \alpha_S - (n_F - 2)\pi \right) = \mathcal{A}_F.$$

La somme des aires de ces polygones est l'aire de la sphère, à savoir  $4\pi R^2$ . On a donc :

$$\sum_{F \in \mathcal{F}} \left( \sum_{\mathcal{S}_F} \alpha_S - (n_F - 2)\pi \right) = 4\pi,$$

D'autre part, lorsqu'on fait la somme de tous les angles on obtient  $2\pi$  fois le nombre  $s$  de sommets de  $P$ . On obtient donc aussi

$$\sum_{F \in \mathcal{F}} \sum_{\mathcal{S}_F} \alpha_S = 2\pi s.$$

Cela fournit l'égalité

$$2\pi s - \sum_{\mathcal{F}} n_F \pi + 2\pi f = 4\pi.$$

Mais la somme  $\sum_{\mathcal{F}} n_F$  est égale à  $2a$  (lorsqu'on fait la somme des nombres de côtés des faces on compte deux fois chaque arête). Finalement, on a

$$2\pi(s - a + f) = 4\pi,$$

soit

$$s + f = a + 2.$$

□

Exemples : Pour le cube on a  $a = 12$ ,  $f = 6$ ,  $s = 8$  et  $12+2=6+8$ . Pour le tétraèdre on a  $a = 6$ ,  $f = 4$ ,  $s = 4$  et  $6+2=4+4$ . On pourra vérifier cette formule pour le dodécaèdre, l'icosaèdre,...