Cours du 30/03/2020

Le polycopié de F. Golse est la référence de base.

• Avant d'aborder ce cours, il peut être utile de réviser les Propositions et Théorèmes principaux du cours précédent ou, à défaut, le Paragraphe 5.5 qui permet de réviser ces notions dans le cadre de la transformation de Fourier partielle.

• Lire le Paragraphe 5.6. C'est l'occasion de faire le lien avec l'exercice 4 qui a été posé en DM. Bien comprendre la preuve (pas si facile) de la Proposition 5.6.4.

• Lire le Paragraphe 5.7 jusqu'à la Proposition 5.7.4 inclus. L'objectif pour l'instant est de découvrir la définition des espaces de Sobolev, et de se familiariser avec.

• Répondre aux questions qui sont posées ci-dessous, en justifiant les réponses. En particulier dire si la réponse est OUI ou NON. C'est pour le 30/03 au soir. Un corrigé sera mis en ligne ultérieurement.

I. Soit $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une suite à croissance lente, c'est à dire vérifiant :

$$\exists (C,N)\in \mathbb{R}_+^*\times\mathbb{N}, \qquad \forall k\in\mathbb{Z}, \quad |c_k|\leqslant C\,(1+|k|)^N .$$

Alors la série de Fourier $\displaystyle\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikt}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers une distribution qui est 2π-périodique.

OUI

Une réponse possible consiste à utiliser une astuce qui a déjà été exploitée en TD. Il s'agit de considérer une "primitive" (d'ordre suffisamment élevé) de la série, par exemple :

$$F(t) := \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} (ik)^{-N-2}\, c_k\, e^{ikt} = \lim_{K\to+\infty} F_K(t), \qquad F_K(t) := \sum_{|k|\leqslant K} (ik)^{-N-2}\, c_k\, e^{ikt},$$

qui est continue en qualité de somme normalement convergente - la convergence étant garantie par des coefficients en $O(|k|^{-2})$ - de fonctions continues. Les sommes partielles $F_N(\cdot)$ sont continues et 2π-périodiques. Elles convergent dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers une distribution (c'est F) qui est 2π-périodique. Comme l'opération de dérivation est continue sur $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on récupère :

$$F^{(N+2)}(t) := \sum_{k\in\mathbb{Z}^*} c_k\, e^{ikt} = \lim_{K\to+\infty} F_K^{(N+2)}(t),$$

ce qui garantit la convergence dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de la série considérée vers la distribution 2π-périodique $c_0+F^{(N+2)}$.

II. Soit $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Montrer d'abord qu'on a :

$$\parallel \varphi \parallel_{L^\infty(\mathbb{R})} \leqslant \parallel \varphi \parallel_{H^1(\mathbb{R})} .$$

Soit maintenant $u\in H^1(\mathbb{R})$. Peut-on trouver un représentant de u qui soit continu et tende vers 0 en l'infini ?

OUI

Pour le premier point, il suffit de remarquer (en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz) :

$$|\varphi(x)|^2 = 2\int_{-\infty}^x \varphi(s)\varphi'(s)\,ds \leqslant 2 \parallel \varphi \parallel_{L^2(\mathbb{R})} \parallel \varphi' \parallel_{L^\infty(\mathbb{R})} \leqslant \parallel \varphi \parallel_{L^2(\mathbb{R})}^2 + \parallel \varphi' \parallel_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 = \parallel \varphi \parallel_{H^1(\mathbb{R})}^2 .$$

Les éléments permettant de répondre au second point se trouvent à cette adresse (Chapter I, Lemma 1.3).