Université de Rennes I Année 2019-2020
M1 **DanF**

Cours du 23/03/2020 - Corrigé

Le polycopié de F. Golse est la référence de base.

• Lire le Paragraphe 5.3 sur les *distributions tempérées*. Apprendre par coeur la Définition 5.3.1 et aussi se familiariser avec les Exemples 5.3.2 et 5.3.4. Comprendre le Théorème 5.3.5 et en retenir le contenu.

• Lire le Paragraphe 5.4 sur la *transformation de Fourier sur* $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Bien visualiser comment les opérations de dérivation, de multiplication et de convolution sont échangées par Fourier. Le Théorème 5.4.5 est à étudier en détail. Bien maîtriser la transformation de Fourier inverse.

• Répondre par OUI ou par NON aux trois questions qui sont posées ci-dessous. Justifier les réponses. C'est pour le 23/03 au soir. Un corrigé sera mis en ligne ultérieurement.

I. La fonction f qui à $x \in \mathbb{R}$ associe $f(x) = 2x \sin e^x + x^2 e^x \cos e^x$ est une distribution tempérée sur $\mathbb{R}$.

OUI

On a $f(x) = F'(x)$ *avec* $F(x) = x^2 \sin e^x$. *Le Théorème 5.3.5 du cours permet de conclure.*

II. Une distribution tempérée T sur $\mathbb{R}$ admet une primitive qui est une distribution tempérée.

OUI

On sait que $\mathcal{S}'(\mathbb{R}) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, *et que par ailleurs toute distribution* $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ *admet une primitive* S. *La question est donc de savoir si* S *est tempérée. On peut écrire (Théorème 5.3.5) :*

$$T = \partial_x^m \big((1+x^2)^n f(x) \big) \quad \textit{avec } (m,n) \in \mathbb{N}^2 \textit{ et } f \textit{ bornée.}$$

Si $m > 0$, *il suffit de prendre :*

$$S = \partial_x^{m-1} \big((1+x^2)^n f(x) \big) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

Pour $m = 0$, *on peut considérer :*

$$F(x) = \int_0^x (1+y^2)^n f(y) \; dy = (1+x^2)^{n+1} O(1) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

III. On travaille sur $\mathbb{R}^d$ avec $d \in \mathbb{N}^*$. Soit $P(\partial)$ un opérateur différentiel d'ordre $p \in \mathbb{N}$ dont les coefficients sont constants et non tous nuls :

$$P(\partial) := \sum_{|\alpha| \leqslant p} a_\alpha \, \partial_x^\alpha, \qquad \exists \alpha \in \mathbb{N}^d \, ; \quad a_\alpha \neq 0.$$

Soit T une distribution à support compact $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$ vérifiant $P(\partial) T = 0$. On a nécessairement $T \equiv 0$.

OUI

On sait que $\hat{T}$ *s'identifie à une fonction* $\hat{T} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ *vérifiant :*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \quad P(i\xi) \hat{T}(\xi) = 0.$$

La fonction $P(\cdot)$ *étant analytique, ses zéros sont isolés de sorte que* $\hat{T}$ *s'annule sur un sous- ensemble dense de* $\mathbb{R}^d$ *et donc (par continuité) partout sur* $\mathbb{R}^d$. *Ainsi, on récupère* $\hat{T} = 0$, *et ensuite* $T = 0$.