Université de Rennes I Année 2019-2020
M1 **DanF**

Cours du 16/03/2020 - Corrigé

• Lire le chapitre 5 du cours de F. Golse jusqu'au Paragraphe 5.3 (non inclus). Lire les preuves et savoir les refaire, en particulier celle de la Proposition 5.1.7 (qui n'est pas si facile !).

• Répondre par OUI ou par NON aux deux questions qui sont posées ci-dessous. Justifier les réponses. C'est pour le 16/03. Un corrigé sera mis en ligne ultérieurement.

I. La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = ie^{-x^2} e^{ie^{x^2}}$$

est dans la classe de Schwartz.

NON

La dérivée de f s'écrit :

$$f'(x) = -2ixe^{-x^2} e^{ie^{x^2}} - 2xe^{ie^{x^2}}.$$

Lorsque $|x|$ tend vers $+\infty$, on a donc :

$$|f'(x)| = 2\,|x| + o(1)$$

qui n'est pas borné contrairement à ce que requiert le contrôle de la semi-norme $\mathcal{N}_1$ de f. En effet :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \; |f'(x)| \; = \; +\infty \leqslant \mathcal{N}_1(f).$$

La fonction f décroit rapidement puisque $|f(x)| \leqslant e^{-x^2}$. La difficulté vient ici de ce que les fortes oscillations de f compensent sa rapide décroissance.

II. Pour que la transformée de Fourier d'une fonction f soit une Gaussienne, il faut et il suffit que la fonction f soit une Gaussienne.

OUI

C'est un excellent test de compréhension du cours dans la mesure où la réponse combine le théorème 5.2.5 et le lemme 5.2.6 du cours. Soit f une fonction.

- Si f est une Gaussienne, le lemme 5.2.6 dit que $\hat{f}$ est une Gaussienne.

- Si $\hat{f}$ est une Gaussienne, la formule d'inversion donnée dans le théorème 5.2.5 indique que $f(-x)$ s'obtient par une transformée de Fourier de $\hat{f}$. D'après le lemme 5.2.6, c'est une Gaussienne. Pareil pour f.