Université de Rennes I Année 2019-2020
L2 **Algèbre IV**

Cours du 27/03/2020 - Corrigé

La référence de base pour ce cours est accessible en suivant ce LIEN.

• Lire les paragraphes 1.5, 1.6 et 1.7 dont il faut comprendre et apprendre les énoncés.

• Faire les exercices 12 p. 11, 6 p. 12 et 22 p.14.

Exercice 12 p. 11. Réinterpréter le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt en terme de projections orthogonales.

Soit $(f_1, f_2, \cdots, f_n)$ *une famille libre. On pose* $e_1 = f_1$. *Pour* $p < n$, *connaissant* $(e_1, \cdots, e_p)$ *avec :*

$$\mathit{Vect}(e_1, \cdots, e_p) = F_p := \mathit{Vect}(f_1, \cdots, f_p),$$

on pose $e_{p+1} := f_{p+1} - P_p(f_{p+1})$ *où* P_p *est la projection orthogonale de* F_{p+1} *sur* F_p. *Ainsi* $e_{p+1} \in F_p^{\perp}$. *On obtient ainsi, en faisant varier* p *de* 1 *à* n, *une base* $(e_1, \cdots, e_n)$ *dont la construction s'apparente au procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt.*

Exercice 6 p. 12. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par u, c'est à dire $u(F) \subset F$. Montrer que $F^{\perp}$ est stable par u^*, c'est à dire $u^*(F^{\perp}) \subset F^{\perp}$. Interpréter matriciellement ce résultat.

Soit $f \in F^{\perp}$. *Il s'agit de prouver que* $u^*(f) \in F^{\perp}$ *ou encore :*

$$\forall g \in F, \quad \langle g, u^*(f) \rangle = \langle u(g), f \rangle = 0.$$

Ce dernier point résulte de la condition $u(F) \subset F$ *qui garantit* $u(g) \in F$.
On note p *la dimension de* F. *Soit* M *la matrice de* u *dans une base orthonormée de* $E = F \oplus F^{\perp}$ *(avec les* p *premiers vecteurs dans* F, *et les suivants dans* $F^{\perp}$*). Alors la matrice de* $u^{\star}$ *dans cette même base de* $F \oplus F^{\perp}$ *est donnée par* ${}^tM$, *et on a les décomposition par blocs :*

$$M = \begin{pmatrix} \star & \star \\ 0 & \star \end{pmatrix}, \qquad {}^tM = \begin{pmatrix} \star & 0 \\ \star & \star \end{pmatrix}$$

qui reflète les propriétés citées.

Exercice 22 p. 14.

On commence par remarquer que $s \circ s = Id$ *de sorte que* s *est inversible avec* $s^{-1} = s$.

(i) $\Longrightarrow$ *(ii) On suppose* $s \in O(E)$. *Alors* $s^* = s^{-1} = s$ *si bien que* $s \in \mathit{Sym}(E)$.

(ii) $\Longrightarrow$ *(iii) On suppose* $s \in \mathit{Sym}(E)$. *Alors pour tout* $x = x_F \in F$ *et* $y = y_G \in G$, *on a :*

$$\langle s(x), y \rangle = \langle x, y \rangle = \langle x, s^*(y) \rangle = \langle x, -y \rangle,$$

ce qui conduit à $\langle x, y \rangle = 0$, *c'est à dire* $G = F^{\perp}$.

(iii) $\Longrightarrow$ *(i) Si* $G = F^{\perp}$, *on a :*

$$\langle s(x), s(y) \rangle = \langle x_F - x_G, y_F - y_G \rangle = \langle x_F, y_F \rangle + \langle x_G, y_G \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Par conséquent $s \in O(E)$.