Université de Rennes I Année 2019-2020
L2 **Algèbre IV**

Cours du 20/03/2020 - Corrigé

• Lire les chapitres 4.4 et 4.5 du cours disponible sur ce LIEN. Lire les preuves et savoir les refaire.

• Répondre par OUI ou par NON aux deux questions qui sont posées ci-dessous. Justifier vos réponses. C'est pour le 20/03 au soir. Un corrigé sera mis en ligne ultérieurement.

I. Soit E un espace vectoriel euclidien. On fixe $(x, y) \in E^2$. Les deux vecteurs x et y sont orthogonaux si et seulement si

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \| x + \lambda y \| \geqslant \| x \| .$$

OUI

Les deux vecteurs x et y sont orthogonaux si et seulement si $\langle x, y \rangle = 0$. Or l'inégalité équivaut à :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \| x + \lambda y \|^2 = \| x \|^2 + 2\lambda \langle x, y \rangle + \lambda^2 \| y \|^2 \geqslant \| x \|^2 .$$

Pour $0 \neq \lambda = \mu^{-1}$ avec $\mu \in \mathbb{R}^*$, cela revient à imposer :

$$(\star) \qquad \forall \mu \in \mathbb{R}^*, \qquad 2\mu \langle x, y \rangle + \| y \|^2 \geqslant 0.$$

$\Longrightarrow$ *Si $\langle x, y \rangle < 0$, (resp. $\langle x, y \rangle > 0$) en faisant tendre μ vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), on obtient une contradiction.*
$\Longleftarrow$ *Si $\langle x, y \rangle = 0$, il est clair que l'inégalité $(\star)$ est vérifiée puisque $\| y \|^2 \geqslant 0$.*

II. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \leqslant n$. De toute famille $(f_1, \cdots, f_p)$ de vecteurs, il est possible d'extraire une famille orthonormale $(e_1, \cdots, e_p)$ telle que

$$\text{Vect}\,(f_1, \cdots, f_p) = \text{Vec}\,(e_1, \cdots, e_p),$$

où Vect est une abréviation pour *espace vectoriel engendré par.*

NON

Il y a un piège. L'énoncé n'est autre qu'une conséquence du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt sous réserve que la famille $(f_1, \cdots, f_p)$ soit composée de vecteurs libres. Dans le cas contraire, on peut facilement trouver des contre-exemples : prendre $p = 2$ et $f_1 = f_2 \neq 0$ de sorte que :

$$\mathit{dim}\ \mathit{Vect}(f_1, f_2) = 1,$$

alors que :

$$\mathit{dim}\ \mathit{Vect}(e_1, e_2) = 2,$$

puisque les deux vecteurs orthogonaux e_1 et e_2 sont nécessairement non colinéaires.