
Cours du 03/04/2020 - Corrigé

- Lire, comprendre et apprendre le paragraphe 2.1 du cours qui est accessible en suivant ce [LIEN](#). Pour ceux qui veulent aller plus loin, il peut être utile de lire aussi le paragraphe 2.2 de cette référence.
- Une application importante des formes quadratique est la *diagonalisation des matrices symétriques*. Le résultat principal est le Théorème qui est encadré dans ce [texte](#). Dans un premier temps, comprendre les deux preuves ainsi que le contenu de l'énoncé. Puis apprendre par coeur le Théorème.

Avant toute chose, il est vivement conseillé de réviser le cours en relisant le chapitre 5 de ce [LIEN](#)!

Exercice I. Soit $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. On considère la matrice :

$$O := \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}.$$

I.1. Déterminer les valeurs possibles de (a, b) donnant lieu à une matrice O qui est orthogonale.

Les vecteurs colonnes doivent être deux à deux orthogonaux ($2ab + b^2 = 0$) et de norme un ($a^2 + 2b^2 = 1$). Comme $b \neq 0$, cela impose (première relation) $b = -2a$ puis, sachant cela, (deuxième relation) $9a^2 = 1$. On obtient ainsi :

$$(a, b) = \pm \frac{1}{3} (1, -2).$$

I.2. On suppose désormais que la matrice O est orthogonale. Quelle autre propriété est vérifiée par O , et quelle information (en lien avec le [Théorème](#) du cours) peut-on en déduire ?

On peut remarquer que la matrice O est symétrique. Elle est donc orthogonalement diagonalisable. Autrement dit, il existe une base orthonormée (f_1, f_2, f_3) dans laquelle la matrice O s'écrit :

$$O := \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}.$$

I.3. Quelle est selon le signe $\pm$ du déterminant de O , la transformation géométrique qui correspond à l'action de la matrice O ?

Comme la matrice O est orthogonale, on a nécessairement $\lambda_i = \pm 1$ (les vecteurs colonne de O sont de norme un). La matrice O ne peut pas être l'identité, ni son opposé $-Id$. On ne peut donc pas avoir $\lambda_i = 1$ (ou -1) pour tout indice i . Soit $k \in \{1, 2\}$ le nombre de valeurs propres égales à 1. On a :

$$\det O = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = \begin{cases} +1 & \text{si } k = 1, \\ -1 & \text{si } k = 2. \end{cases}$$

Quitte à échanger les f_i , on peut toujours supposer que les k premiers vecteurs f_i sont associés à la valeurs propre $+1$. On reconnaît alors une symétrie orthogonale par rapport à la droite engendrée par f_1 (lorsque

$k = 1$) et une symétrie orthogonale par rapport au plan engendré par f_1 et f_2 (lorsque $k = 2$). Tout dépend de la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 1.

- Pour $(a, b) = \frac{1}{3}(1, -2)$, on obtient le plan P d'équation $x + y + z = 0$, et l'action de la matrice O correspond à une symétrie orthogonale par rapport à P (signe du déterminant égal à $-$).

- Pour $(a, b) = -\frac{1}{3}(1, -2)$, on obtient la droite D engendrée par le vecteur $\vec{u} = {}^t(1, 1, 1)$, et l'action de la matrice O correspond à une symétrie orthogonale par rapport à D (signe du déterminant égal à $+$).

Exercice II. Regarder cette [vidéo](#), et s'en inspirer pour diagonaliser la matrice symétrique :

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

c'est à dire pour trouver une matrice P (à déterminer !) telle que $A = PDP^{-1}$ avec D matrice diagonale.

La réponse à la question posée ci-dessus apparaît dans l'exemple 5.2 traité dans ce [LIEN](#).