L3 Phytem
Outils mathématiques
Correction du TD n^o 7
Distributions

Exercice 1. Soient p et q deux entiers naturels. Calculer la distribution

$$T = x^p \delta^{(q)}$$

où $\delta^{(i)}$ est la dérivée $i^{\text{ième}}$ de la mesure de Dirac sur $\mathbb{R}$.

Correction :

$x^p \in \mathcal{C}^\infty$ donc $x^p\delta^{(q)}$ a un sens.
Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\left\langle x^p\delta^{(q)}, \varphi \right\rangle = \left\langle (-1)^q\delta, (x^p\varphi)^{(q)} \right\rangle = (-1)^q \left[\left(\frac{d}{dx}\right)^q (x^p\varphi) \right](0). \tag{1}$$

D'après la formule de Leibniz

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^q (x^p\varphi) = \sum_{i=0}^{q} C_i^q \left(\frac{d}{dx}\right)^i (x^p) \left(\frac{d}{dx}\right)^{q-i} \varphi = \sum_{i=0}^{q} F_{i,q}(x). \tag{2}$$

1. Si $p > q$, la quantité (2) s'annule en $x = 0$.
   En effet,
   $$\left(\frac{d}{dx}\right)^i (x^p) = C_i^p x^{p-i}$$
   et $p - i$ est strictement positif.
2. Si $p \leq q$, alors la quantité (2) s'écrit
   $$\sum_{i=0}^{p-1} F_{i,q}(x) + \sum_{i=p}^{q} F_{i,q}(x).$$
   La première de ces deux sommes s'annule à l'origine pour la même raison que précédemment, et la deuxième s'écrit
   $$\sum_{i=p}^{q} C_i^q \left(\frac{d}{dx}\right)^i (x^p) \left(\frac{d}{dx}\right)^{q-i} \varphi = C_p^q \left(\frac{d}{dx}\right)^p (x^p) \left(\frac{d}{dx}\right)^{q-p} \varphi$$
   car
   $$\left(\frac{d}{dx}\right)^i (x^p) = 0 \quad \text{si } i \geq p+1.$$
   On a donc dans ce cas, d'après (1)
   $$\left\langle x^p\delta^{(q)}, \varphi \right\rangle = (-1)^q C_p^q p! \varphi^{(q-p)}(0) = \frac{(-1)^p q!}{(q-p)!} \left\langle \delta^{(q-p)}, \varphi \right\rangle.$$

En résumé

$$x^p\delta^{(q)} = \begin{cases} 0 & \text{si } p > q \\ \frac{(-1)^p q!}{(q-p)!}\delta^{(q-p)} & \text{si } p \leq q. \end{cases}$$

Exercice 2. Calculer la dérivée au sens des distributions de la fonction localement intégrable $\ln|x|$ sur $\mathbb{R}$.

Correction :

La fonction $\ln|x|$ pour $x \neq 0$ est intégrable au voisinage de l'origine car pour tout $\varepsilon < 1$, $|x|^{\varepsilon}|\ln|x||$ tend vers 0 lorsque $|x|$ tend vers 0 et donc

$$|\ln|x|| \leq \frac{1}{|x|^{\varepsilon}} \quad \text{pour } x \text{ non nul dans un voisinage de l'origine.}$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on a

$$\left\langle \frac{d}{dx}\ln|x|, \varphi \right\rangle = -\left\langle \ln|x|, \frac{d\varphi}{dx} \right\rangle = -\int_{\mathbb{R}} \ln|x| \frac{d\varphi}{dx} dx. \tag{3}$$

On pourrait penser à faire une intégration par parties, mais la dérivée de $\ln|x|$ est la fonction $\frac{1}{x}$ qui n'est pas intégrable au voisinage de l'origine.

On utilise alors la méthode suivante : d'après le théorème de Lebesgue

$$\int_{\mathbb{R}} \ln|x|\varphi'(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq\varepsilon} \ln|x|\varphi'(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} I_{\varepsilon} \tag{4}$$

car

$$1_{\{|x|\geq\varepsilon\}}|\ln|x|\varphi(x)| \leq |\ln|x|\varphi(x)| \in L^1(\mathbb{R}).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} I_{\varepsilon} &= \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \ln|x|\varphi'(x)dx + \int_{\varepsilon\infty}^{+\infty} \ln|x|\varphi'(x)dx \\ &= [\ln|x|\varphi(x)]_{-\infty}^{-\varepsilon} + [\ln|x|\varphi(x)]_{\varepsilon}^{+\infty} - \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx \\ &= \ln\varepsilon(\varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)) - \int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx. \end{aligned}$$

Or,

$$|\varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)| \leq 2\varepsilon \sup_{\mathbb{R}} |\varphi'(x)|,$$

et, par conséquent

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_{\varepsilon} = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}dx. \tag{5}$$

On déduit de (3), (4) et (5) que

$$\frac{d}{dx}\ln|x| = vp\frac{1}{x}.$$

Exercice 3. Soit la distribution définie dans le plan par la fonction localement intégrable

$$E(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } t - |x| > 0 \\ 0 & \text{si } t - |x| < 0 \end{cases}$$

Soit $\square$ l'opérateur des ondes défini par

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Résoudre $\square E$ au sens des distributions.

<u>Correction</u> :
Soit

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

On a pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$,

$$\begin{aligned}
\langle \square E, \varphi \rangle &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\int_{|x|}^{\infty} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dt dx - \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\int_{-t}^{t} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dx dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left[\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial t}\right]_{t=|x|}^{\infty} dx - \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \left[\frac{\partial \varphi(x,t)}{\partial x}\right]_{x=-t}^{t} dt \\
&= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)(x,|x|) dx - \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)(t,t) dt + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)(-t,t) dt \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{\infty} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)(x,x) dx - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)(x,-x) dx \\
&- \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)(t,t) dt + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)(-t,t) dt \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{\infty} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)(x,x) dx - \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)(-x,x) dx \\
&- \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)(t,t) dt + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)(-t,t) dt
\end{aligned}$$

D'autre part, pour $a \in \mathbb{R}$:

$$\frac{d}{dy}(\varphi(ay,y)) = a\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)(ay,y) + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)(ay,y).$$

On en déduit

$$\langle \square E, \varphi \rangle = -\frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{d}{dy}(\varphi(y,y)) dy - \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{d}{dy}(\varphi(-y,y)) dy$$

$$\langle \square E, \varphi \rangle = \frac{1}{2}\varphi(0,0) + \frac{1}{2}\varphi(0,0) = \varphi(0,0) = \langle \delta, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$$

d'où

$$\square E = \delta \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2).$$

Exercice 4. 1. Montrer que la fonction

$$f(x;y) = \frac{1}{x+iy}$$

définit un élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

2. L'opérateur de Cauchy-Riemann est défini par

$$\tilde{\partial} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Montrer que

$$\tilde{\partial} f = \pi\delta.$$

Correction :

1. Tout d'abord

$$|f(x,y)| = \frac{1}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{|X|} \quad \text{où } X = (x,y).$$

On sait que la fonction $\frac{1}{|X|^\alpha}$ est intégrable au voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}^n$ si $\alpha < n$.
Ici $\alpha = 1$ et $n = 2$ donc f est $L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ ce qui implique que f définit un élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

2. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, on a

$$\langle \bar{\partial} f, \varphi \rangle = -\langle f, \bar{\partial}\varphi \rangle = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{x+iy}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right) dxdy. \tag{6}$$

On passe en coordonnées polaires :

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, quad \Longrightarrow \quad dxdy = rdrd\theta.$$

On a

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta};$$
$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}.$$
$$\langle \bar{\partial} f, \varphi \rangle = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^\infty \frac{e^{-i\theta}}{r}\left(e^{i\theta}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial r} + i\frac{e^{i\theta}}{r}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\theta}\right) rdrd\theta,$$

où

$$\tilde{\varphi}(r,\theta) = \varphi(r\cos\theta, r\sin\theta).$$

D'après le théorème de Fubini,

$$\langle \bar{\partial} f, \varphi \rangle = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^\infty \frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial r}dr\right]d\theta - \frac{i}{2}\int_0^\infty \frac{1}{r}\left[\int_0^{2\pi}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\theta}d\theta\right]dr.$$

Comme $\tilde{\varphi}(0,0) = \varphi(0,0)$ et que $\tilde{\varphi}(r,\theta)$ est 2π-périodique, il vient :

$$\langle \bar{\partial} f, \varphi \rangle = -\frac{1}{2} \times 2\pi \times (-\varphi(0,0)) = \pi\varphi(0,0) = \pi\langle \delta_0, \varphi \rangle$$

et, par conséquent

$$\bar{\partial} f = \pi\delta_0.$$

Exercice 5. On considère dans $\mathbb{R}^2$ la fonction

$$E(x,t) = \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

où $H(t)$ désigne la fonction de Heaviside.

1. Montrer que E définit une distribution sur $\mathbb{R}^2$.
2. L'opérateur de la chaleur est défini par
$$P = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$
Montrer que dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$
$$PE = \delta.$$

Correction :

1. On a la majoration
$$E(x,t) \leq \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}}$$
et la fonction $\dfrac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}}$ est localement intégrable dans $\mathbb{R}^2$.
Donc, $E \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ et définit un élément de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.
2. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$,
$$\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) E, \varphi \right\rangle = -\left\langle E, \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right\rangle = -\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right) dxdt.$$
Or
$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dxdt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbb{R}} \left[\int_\varepsilon^\infty \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt\right] dx = \lim_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon,$$
en vertu du théorème de Lebesgue, puisque
$$\left| 1_{[\varepsilon,\infty[\times\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \varphi(x,t) \right| \leq \frac{C|\varphi(x,t)|}{\sqrt{t}} \quad \in L^1(\mathbb{R}^2).$$
Dans I_ε, on peut alors faire une intégration par parties et écrire
$$I_\varepsilon = -\int_{\mathbb{R}} \int_\varepsilon^\infty \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\right] \varphi(x,t) dtdx + \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \varphi(x,t)\right]_{t=\varepsilon}^\infty dx.$$
Or,
$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\right] = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \left(\frac{x^2}{2t^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right) e^{-\frac{x^2}{4t}},$$
d'où
$$I_\varepsilon = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_\varepsilon^\infty \left(\frac{x^2}{2t^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right) e^{-\frac{x^2}{4t}} \varphi(x,t) dtdx - \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} \varphi(x,\varepsilon) dx. \tag{7}$$
De même
$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dxdt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^\infty \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} dxdt = \lim_{\varepsilon \to 0} J_\varepsilon.$$
Dans J_ε faisons deux intégrations par parties :
$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\right] = -\frac{x}{4\sqrt{\pi} t^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\right] = \left(-\frac{1}{4\sqrt{\pi}t^{\frac{3}{2}}} + \frac{x^2}{8\sqrt{\pi}t^{\frac{5}{2}}}\right) e^{-\frac{x^2}{4t}},$$

d'où

$$\begin{aligned} J_\varepsilon &= \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_\varepsilon^\infty \left(\frac{x^2}{2t^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right) e^{-\frac{x^2}{4t}} \varphi(x,t) dx dt \\ &+ \int_\varepsilon^\infty \left[\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\right]_{x=-\infty}^{+\infty} dt + \int_\varepsilon^\infty \left[\frac{x}{4\sqrt{\pi}t^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \varphi(x,t)\right]_{x=-\infty}^{+\infty} dt \end{aligned}$$

et comme

$$\lim_{x\to\pm\infty} \varphi(x,t) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t) = 0,$$

il vient

$$J_\varepsilon = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \int_\varepsilon^\infty \left(\frac{x^2}{2t^{\frac{5}{2}}} - \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\right) e^{-\frac{x^2}{4t}} \varphi(x,t) dt dx. \tag{8}$$

En utilisant les expressions de I_ε et J_ε données par (7) et (8), il vient

$$I_\varepsilon + J_\varepsilon = -\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} \varphi(x,\varepsilon) dx,$$

d'où

$$\left\langle \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) E, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} \varphi(x,\varepsilon) dx = \lim_{\varepsilon\to 0} K_\varepsilon.$$

Dans l'intégrale, faisons le changement de variable

$$y = \frac{x}{2\sqrt{\varepsilon}} \quad dx = 2\sqrt{\varepsilon} dy$$

$$K_\varepsilon = \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{2\sqrt{\varepsilon}\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} \varphi(2\sqrt{\varepsilon}y, \varepsilon) dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} \varphi(2\sqrt{\varepsilon}y, \varepsilon) dy,$$

or

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varphi(2\sqrt{\varepsilon}y, \varepsilon) = \varphi(0,0)$$

et

$$\left| e^{-y^2} \varphi(2\sqrt{\varepsilon}y, \varepsilon) \right| \leq \sup_{\mathbb{R}} |\varphi(x)| e^{-y^2} \in L^1(\mathbb{R})$$

donc, d'après le théorème de Lebesgue

$$\lim_{\varepsilon\to 0} K_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy\right) \varphi(0,0) = \varphi(0,0).$$

Donc

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) E = \delta.$$

Exercice 6. Soit $x \in \mathbb{R}^3$; on note $r = |x|$.

1. Calculer Δf lorsque f est une fonction qui ne dépend que de r.
2. Soit $f = f(r)$ une fonction qui vérifie dans $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ l'équation

$$\left(\Delta + a^2\right) f = 0$$

   où $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
   Ecrire l'équation différentielle à laquelle satisfait $g(r) = rf(r)$ et en déduire la forme des solutions $\mathcal{C}^\infty$ dans $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$ de $\left(\Delta + a^2\right) f = 0$.
3. Soit $f = f(r)$ une telle solution.
   Montrer que si on pose

$$\ell = \lim_{r\to 0} rf(r),$$

   on a, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$

$$\left(\Delta + a^2\right) f = C\ell\delta$$

   où C est une constante que l'on calculera.
4. En déduire , dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$

$$\Delta\frac{1}{r}.$$

Correction :

1. On a $\Delta = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.
   Calculons l'expression de Δ en coordonnées sphériques :
   comme $f = f(r)$, il suffit de calculer la partie du transformé de Δ qui ne contient que des dérivées par rapport à r (celles en $(\theta,\, \psi)$ appliquées à f donneront zéro).
   On a

$$\begin{cases} x_1 = rf_1(\theta, \psi) \\ x_2 = rf_2(\theta, \psi) \\ x_3 = rf_3(\theta, \psi) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} f(r) &= \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r} \frac{\partial}{\partial r} f(r) \\ \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f(r) &= \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_i}{r}\right) \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{x_i^2}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \left(\frac{1}{r} - \frac{x_i^2}{r^3}\right)\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{x_i^2}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \end{aligned}$$

   d'où

$$\begin{aligned} \Delta f(r) &= \left(\frac{3}{r} - \frac{1}{r^3}\sum_{i=1}^{3} x_i^2\right)\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\left(\sum_{i=1}^{3} x_i^2\right)\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r}. \end{aligned}$$

2. Soit $f = f(r)$ telle que $(\Delta + a^2)f = 0$ dans $\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$.
   Posons $g(r) = rf(r)$.
   On a alors

$$g'(r) = f(r) + rf'(r) \quad g'(r) = 2f'(r) + rf''(r).$$

   D'après la question précédente, on a

$$f''(r) + \frac{2}{r}f'(r) + a^2 f(r) = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^3\backslash\{0\},$$

   d'où, en multipliant par $r \neq 0$:

$$rf''(r) + 2f'(r) + a^2 rf(r) = 0,$$

et donc

$$g''(r) + a^2 g(r) = 0.$$

La solution générale de cette équation dans $\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ est

$$g(r) = c_1 \cos ar + c_2 \sin ar$$

et donc la solution générale de $(\Delta + a^2) f(r) = 0$ dans $\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ est la fonction $\mathcal{C}^\infty$

$$f(r) = c_1 \frac{\cos ar}{r} + c_2 \frac{\sin ar}{r}. \tag{9}$$

3. Avec les notations de l'énoncé, $c_1 = \ell$, donc

$$f(r) = \ell \frac{\cos ar}{r} + c_2 \frac{\sin ar}{r} \quad \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^3).$$

On va montrer que dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$, $(\Delta + a^2) f(r) = C\ell\delta$.
La fonction $c_2 \dfrac{\sin ar}{r}$ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ de $r \in \mathbb{R}$ (tandis que $\ell \dfrac{\cos ar}{r}$ n'est pas définie en 0).
On peut donc calculer $(\Delta + a^2) \dfrac{\sin ar}{r}$ au sens usuel. Or, d'après la question précédente, $\dfrac{\sin ar}{r}$ est solution dans $\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$ de $(\Delta + a^2) f = 0$ (cas où $c_1 = 0$) et comme c'est une fonction $\mathcal{C}^\infty$, on a

$$(\Delta + a^2) \frac{\sin ar}{r} = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R} \text{ entier.}$$

Calculons, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, la quantité $(\Delta + a^2) \dfrac{\cos ar}{r}$:
Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$,

$$\left\langle (\Delta + a^2) \frac{\cos ar}{r}, \varphi \right\rangle = \left\langle \frac{\cos ar}{r}, (\Delta + a^2) \varphi \right\rangle = \int \frac{\cos ar}{r} \cdot (\Delta + a^2) \varphi(r) dr.$$

En utilisant le fait que $\dfrac{\cos ar}{r} \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, on a

$$\left\langle (\Delta + a^2) \frac{\cos ar}{r}, \varphi \right\rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{r \geq \varepsilon} \frac{\cos ar}{r} \cdot (\Delta + a^2) \varphi(r) dr = \lim_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon.$$

D'après la formule de Green, on a :

$$I_\varepsilon = \int_{r \geq \varepsilon} (\Delta + a^2) \left(\frac{\cos ar}{r} \right) \varphi(r) dr + \int_{r = \varepsilon} \left[\frac{\cos ar}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \varphi \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\cos ar}{r} \right) \right] d\sigma_\varepsilon,$$

avec $d\sigma_\varepsilon \varepsilon^2 d\omega$ où $d\omega$ est la mesure de la sphère unité.
Or, dans $\mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$, $(\Delta + a^2) \dfrac{\cos ar}{r} = 0$ (cas où $c_2 = 0$) donc

$$I_\varepsilon = \int_{r = \varepsilon} \left[\frac{\cos ar}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \varphi \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\cos ar}{r} \right) \right] d\sigma_\varepsilon.$$

En outre,

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\cos ar}{r} \right) = \frac{-ar \sin ar - \cos ar}{r^2}$$

et

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right| \leq \sum_{i=1}^{3} \frac{|x_i|}{r} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| \leq \sup_{\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{3} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right| = M \quad \text{car } \frac{|x_i|}{r} \leq 1.$$

Ainsi

$$I_\varepsilon = \underbrace{\varepsilon \cos a\varepsilon \int_{r=\varepsilon} \frac{\partial \varphi}{\partial r} d\omega}_{A} + \underbrace{a\varepsilon \sin a\varepsilon \int_{r=\varepsilon} \varphi d\omega}_{B} + \underbrace{\cos a\varepsilon \int_{r=\varepsilon} \varphi d\omega}_{C}$$

avec

$$|A| \leq \varepsilon |\cos a\varepsilon| M \int_{|x|=1} d\omega \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } \varepsilon \to 0,$$

$$|B| \leq |a|\varepsilon|\cos a\varepsilon| \sup_{\mathbb{R}} |\varphi(x)| \int_{|x|=1} d\omega \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } \varepsilon \to 0,$$

$$C = \cos a\varepsilon \int_{r=\varepsilon} \tilde{\varphi}(\varepsilon, \theta, \psi) d\omega \quad \text{où } \tilde{\varphi}(r, \theta, \psi) = \varphi(rf_1(\theta, \psi), rf_2(\theta, \psi), rf_3(\theta, \psi)).$$

D'après le théorème de Lebesgue,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} C = \varphi(0) \int_{|x|=1} d\omega$$

et donc

$$\left\langle (\Delta + a^2) \frac{\cos ar}{r}, \varphi \right\rangle = \left(\int_{|x|=1} d\omega \right) \langle \delta, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

d'où

$$(\Delta + a^2) f(r) = 4\pi\ell\delta.$$

En particulier, la distribution $-\dfrac{\cos ar}{4\pi r}$ est une solution élémentaire de l'opérateur $\Delta + a^2$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 7. Soient p, q, m et n des entiers. Calculer

$$T = \left[x^p \delta^{(q)}\right] * \left[x^m \delta^{(n)}\right]$$

où $\delta^{(i)}$ est la dérivée $i^{\text{ième}}$ de la mesure de Dirac sur $\mathbb{R}$.

Correction :
On a vu (exercice (1) que

$$x^p \delta^{(q)} = \begin{cases} 0 \quad \text{si } p > q \\ \\ \frac{(-1)^p q!}{(q-p)!} \delta^{(q-p)} \quad \text{si } p \leq q. \end{cases}$$

On en déduit que

1. Si $p > q$ ou $m > n$ alors $T = 0$.
2. Supposons $p \leq q$ et $m \leq n$. Alors

$$T = A_{p,q,m,n} \delta^{(q-p)} * \delta^{(n-m)}$$

où

$$A_{p,q,m,n} = \frac{(-1)^{q+n} q! n!}{(q-p)!(n-m)!}.$$

D'autre part, si $T \in \mathcal{E}'$ ($\mathcal{E}'$ étant l'espace des distributions à support compact) et $S \in \mathcal{D}'$ on a

$$\begin{cases} \partial^\alpha \partial^\beta (S * T) = (\partial^\alpha S) * (\partial^\beta T) \\ \\ \delta * S = S \end{cases}$$

donc

$$T = A_{p,q,m,n} \left(\frac{d}{dx}\right)^{(q-p)} \left(\frac{d}{dx}\right)^{(n-m)} (\delta * \delta) = A_{p,q,m,n} \delta^{(q+n-p-m)}.$$

Exercice 8. Montrer qu'il n'est pas possible de définir le produit de convolution de trois distributions quelconques, au sens où ce produit ne peut-être associatif.

<u>Correction</u> :

Supposons que l'on puisse définir le produit de convolution de trois distributions u, v et w de telle manière que

$$(u * v) * w = u * (v * w).$$

Posons

$$u = 1, \quad v = \delta', \quad w = H.$$

On aurait

$$u * v = 1 * \delta' = \frac{d}{dx}(1 * \delta) = \frac{d}{dx}1 = 0$$

donc

$$(u * v) * w = 0 * H = 0.$$

D'autre part

$$v * w = \delta' * H = \frac{d}{dx}(\delta * H) = \frac{d}{dx}H = \delta$$

d'où

$$u * (v * w) = 1 * \delta = 1$$

ce qui est absurde.

Exercice 9. 1. Calculer, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$,

$$\lim_{p\to\infty}\frac{p^n}{\pi^{\frac{n}{2}}}\left(1-\frac{|x|^2}{p}\right)^{p^3}=\lim_{p\to\infty}P_p(x).$$

2. En déduire que toute distribution à support compact est limite, au sens des distributions, d'une suite de polynômes.

Correction :

1. Soit $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Il existe $M>0$ tel que $supp\,\varphi\subset\{x:|x|\le M\}$.
   Posons
$$I_p=\int_{|x|\le M}\varphi(x)\frac{p^n}{\pi^{\frac{n}{2}}}\left(1-\frac{|x|^2}{p}\right)^{p^3}dx.$$
   Faisons le changement de variables $y=px$; alors $dy=p^n dx$.
   D'où
$$I_p=\frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}}\int_{|y|\le pM}\left(1-\frac{|y|^2}{p^3}\right)^{p^3}\varphi\left(\frac{y}{p}\right)dy=\frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}}1_{|y|\le pM}\left(1-\frac{|y|^2}{p^3}\right)^{p^3}\varphi\left(\frac{y}{p}\right)dy.$$
   Fixons $y\in\mathbb{R}^n$. Pour p assez grand on a
$$\left(1-\frac{|y|^2}{p^3}\right)^{p^3}=e^{p^3\ln\left(1-\frac{|y|^2}{p^3}\right)}$$
   d'où
$$\begin{cases}\lim_{p\to\infty}1_{|y|\le pM}\left(1-\frac{|y|^2}{p^3}\right)^{p^3}=e^{-|y|^2}1_{\mathbb{R}^n}\\[2ex]\left|\left(1-\frac{|y|^2}{p^3}\right)^{p^3}\right|\le e^{-|y|^2}.\end{cases}$$
   D'autre part
$$\varphi\left(\frac{y}{p}\right)\longrightarrow\varphi(0)$$
   et
$$\left|\left(1-\frac{|y|^2}{p^3}\right)^{p^3}\varphi\left(\frac{y}{p}\right)\right|\le Ce^{-|y|^2}\in L^1(\mathbb{R}^n)$$
   et donc, par le théorème de Lebesgue
$$\lim_{p\to\infty}I_p=\frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-|y|^2}dy\cdot\varphi(0)=\varphi(0)$$
   ce qui signifie que dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$,
$$\lim_{p\to\infty}\frac{p^n}{\pi^{\frac{n}{2}}}\left(1-\frac{|x|^2}{p}\right)^{p^3}=\delta.$$

2. Soit $T\in\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ alors $T*P_p$ a un sens. De plus, c'est une fonction $\mathcal{C}^\infty$.
   D'autre part,
$$\partial^\alpha(T*P_p)=T*\partial^\alpha P_p=0\quad\text{si }|\alpha|>2p^3$$
   donc $T*P_p$ est un polynôme.
   Montrons que $T*P_p$ converge vers T dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$:
   En effet, si $U\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (ou $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$) et $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ (ou $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$), on a
$$\langle T,\varphi\rangle=(T*\check{\varphi})(0)\quad\text{avec }\check{\varphi}(t)=\varphi(-t)$$
$$\langle T*P_p,\varphi\rangle=\left[(T*P_p)*\check{\varphi}\right](0)=\left[P_p*(T*\check{\varphi})\right](0)$$

car $(T * P_p) \in \mathcal{C}^\infty$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.
On en déduit que

$$\langle T * P_p, \varphi \rangle = \left\langle P_p, T \check{*} \check{\varphi} \right\rangle$$

et $T \check{*} \check{\varphi}$ est un élément de $\lceil[\mathbb{R}^n)$.
D'après la première question, on a

$$\lim_{p \to \infty} \left\langle P_p, T \check{*} \check{\varphi} \right\rangle = T \check{*} \check{\varphi}(0) = T * \check{\varphi}(0)$$

donc

$$\lim_{p \to \infty} \langle T * P_p, \varphi \rangle = (T * \check{\varphi})(0) = \langle T, \varphi \rangle\,, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

On en déduit que dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$,

$$\lim_{p \to \infty} T * P_p = T.$$
