UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Distribution et ANalyse de Fourier

CC4 du 28/03/2018 (durée 40mn)

Les documents ne sont pas autorisés

Nom : **Prénom :**

Dans le cas d'une réponse par OUI *ou par* NON, *on demande d'entourer la bonne réponse (ou de barrer la mauvaise réponse). Si c'est* OUI, *donner une preuve. Si c'est* NON, *fournir un contre-exemple.*

Questions de cours. On se place sur $\mathbb{R}^N$ avec $N \in \mathbb{N}^*$.

Q1. Soit $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$, $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^N)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$. On rappelle que :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)\,, \qquad \langle \tilde{S}, \varphi\rangle = \langle S, \tilde{\varphi}\rangle\,, \qquad \tilde{\varphi}(x) = \varphi(-x)\,.$$

Etant donné $x \in \mathbb{R}^N$, donner la définition des convolutions $\tilde{S} * \varphi(x)$ et $T * S$:

$\tilde{S} * \varphi(x) =$ $\qquad\qquad$ $\langle T * S, \varphi\rangle =$

Q2. On note $\hat{T}$ la transformation de Fourier de $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. Etant donnés $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, rappeler la définition de :

$\langle \hat{T}, \varphi\rangle =$ $\qquad\qquad$ $\displaystyle \hat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\,x\cdot\xi}\ \varphi(x)\ dx\,.$

Exercice I. Résoudre dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ l'équation différentielle $u' + u = \delta_0$.

$u =$

Exercice II. Etant donnés $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, calculer :

$\langle \delta'_a \otimes \delta'_b, \psi\rangle =$ $\qquad\qquad$ $\langle \delta'_a * \delta'_b, \varphi\rangle =$

Exercice III. On rappelle que $\mathcal{F}(\delta_0) = 1$ et $\mathcal{F}^{-1}T = (2\,\pi)^{-N}\,\widetilde{\mathcal{F}T}$. Donner la transformée de Fourier des distributions tempérées $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ associées aux fonctions suivantes :

III.1) $u(x) = \delta_0^{(k)}$ avec $k \in \mathbb{N}$.

$\hat{u}(\xi) =$

III.2) $u(x) = x^k$ avec $k \in \mathbb{N}$.

$\hat{u}(\xi) =$

T.S.V.P. $\Longrightarrow$

Exercice IV. Il existe une suite de polynômes qui converge vers δ_0 au sens de $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
Indication : A l'aide de l'exercice II, interpréter cette affirmation côté Fourier.

OUI - NON

Exercice V. Soit $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. On suppose que $T * \varphi \equiv 0$. Alors T est la distribution nulle ($T \equiv 0$) ou φ est la fonction nulle ($\varphi \equiv 0$).

OUI - NON

Exercice VI. La distribution

$$T = i \sum_{n \in \mathbb{N}} e^n \, e^{i\, e^n} \; \delta_n(x) + \sum_{n \in \mathbb{N}} e^{i\, e^x} \; \delta'_n(x) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$$

est tempérée.

OUI - NON