Université de Rennes

Distribution et ANalyse de Fourier

Corrigé du CC3

Les documents ne sont pas autorisés

Nom : **Prénom :** **Gp TD :**

Exercice I. Soit $g \in L^1(\mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les distributions :
- $T_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ associée à la fonction $\mathbb{R} \ni x \mapsto n\, g(nx)$;
- $S_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ associée à la fonction $\mathbb{R} \ni x \mapsto (n+1)\, \Big[g\Big(x - \dfrac{1}{n+1}\Big) - g(x) \Big]$.

I.1. Montrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et calculer sa limite.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Alors, en changeant nx en y, on trouve

$$\langle T_n, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} g(y)\ \varphi(y/n)\ dy.$$

On observe que :
- *la suite de fonctions $\Big(g(y)\ \varphi(y/n)\Big)_n$ admet presque partout pour limite $g(y)\,\varphi(0)$;*
- *la suite de fonctions $\Big(g(y)\ \varphi(y/n)\Big)_n$ est majorée par $\parallel \varphi \parallel_\infty\ g(y)$ qui est intégrable.*

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée qui fournit

$$\lim_{n\to+\infty} \langle T_n, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} g(y)\ \varphi(0)\ dy = \int_{\mathbb{R}} g(y)\, dy\ \langle \delta_0, \varphi \rangle.$$

I.2. Montrer que la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et calculer sa limite.

Un simple calcul fournit

$$\langle S_n, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} g(y)\ \psi_n(y)\ dy\,, \qquad \psi_n(y) := (n+1)\ \Big[\varphi\Big(y + \frac{1}{n+1}\Big) - \varphi(y) \Big].$$

On observe que :
- *la suite de fonctions $\Big((g\,\psi_n)(y)\Big)_n$ admet presque partout pour limite $g(y)\,\varphi'(y)$;*
- *la suite de fonctions $\Big((g\,\psi_n)(y)\Big)_n$ est majorée (pour A ajusté assez grand) par la fonction $\parallel \varphi' \parallel_\infty\ \mathbb{1}_{[-A,A]}$ qui est intégrable.*

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée qui fournit

$$\lim_{n\to+\infty} \langle S_n, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}} g(y)\ \varphi'(y)\ dy = \langle -T_g', \varphi\rangle.$$

Exercice II. On considère les applications linéaires suivantes de $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{C}$:

— $T : \varphi \mapsto \int_0^{+\infty} \varphi(x^2)\, dx$;

— $S : \varphi \mapsto \lim_{\varepsilon\to 0+} \Big(\int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{\varphi(x)}{x^2}\, dx - 2\ \frac{\varphi(0)}{\varepsilon}\Big)$.

II.2. Montrer que T est une distribution. Quel est son ordre ?

Pour tout compact $K \subset \mathbb{R}$, on peut trouver $A_K > 1$ tel que $K \subset [-A_K, A_K]$. Pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, on a alors par changement de variables

$$|\int_0^{+\infty} \varphi(x^2)\, dx| = |\int_0^{A_K^2} \frac{\varphi(y)}{2\sqrt{y}}\, dy| \le C_K\ \parallel \varphi \parallel_\infty , \qquad C_K := \int_0^{A_K^2} \frac{1}{2\sqrt{y}}\, dy < +\infty ,$$

ce qui montre que T est une distribution d'ordre zéro.

II.2. Montrer que S est une distribution.

On écrit

$$\int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{\varphi(x)}{x^2}\, dx - 2\ \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} = -\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \varphi(x)\ \Big(\frac{1}{x}\Big)'\, dx - \int_{+\infty}^{\varepsilon} \varphi(x)\Big(\frac{1}{x}\Big)'\, dx - 2\ \frac{\varphi(0)}{\varepsilon}$$

ce qui donne après intégration par parties

$$\int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{\varphi(x)}{x^2}\, dx - 2\ \frac{\varphi(0)}{\varepsilon} = \frac{\varphi(-\varepsilon) + \varphi(\varepsilon) - 2\,\varphi(0)}{\varepsilon} + \int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{\varphi'(x)}{x}\, dx\,.$$

On remarque que

$$\varphi(-\varepsilon) + \varphi(\varepsilon) - 2\,\varphi(0) = O(\varepsilon^2)\,.$$

Passant à la limite, on obtient

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \Big(\int_{\mathbb{R}\setminus[-\varepsilon,\varepsilon]} \frac{\varphi(x)}{x^2}\, dx - 2\ \frac{\varphi(0)}{\varepsilon}\Big) = \langle vp\,\Big(\frac{1}{x}\Big), \varphi'\rangle = \langle -vp\,\Big(\frac{1}{x}\Big)', \varphi\rangle.$$

La distribution vp étant d'ordre 1, S est d'ordre 2.

Exercice III. On note H la fonction de Heaviside (qui vaut 0 pour $x \le 0$ et 1 pour $x > 0$). On désigne par H^{*n} le produit de convolution de H par elle-même n fois ($H * H * \cdots * H$ répété n fois).

III.1) Montrer par récurrence que $H^{*n} = x^{n-1}\, H/(n-1)!$.

C'est vrai pour $n = 1$. Ensuite :

$$
\begin{aligned}
\langle H^{*n}, \varphi\rangle &= \langle H \otimes H^{*(n-1)}, \varphi(x+y)\rangle \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} H(x)\, y^{n-1}\, H(y)\, \varphi(x+y)\; dx\, dy \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} H(x)\, (z-x)^{n-1}\, H(z-x)\, \varphi(z)\; dx\, dz \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} (z-x)^{n-1}\, H(x)\, H(z-x)\; dx \right) \varphi(z)\, dz \\
&= \frac{1}{(n-1)!} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^z (z-x)^{n-1} dx \right) \varphi(z)\, dz \\
&= \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{R}} z^n\, \varphi(z)\, dz\,.
\end{aligned}
$$

III.2) Que vaut la dérivée d'ordre n de H^{*n} ?

Soit on utilise un calcul direct basé sur la formule de Leibniz. Ou on remarque que

$$(H^{*n})^{(n)} = (H')^{*n} = (\delta_0)^{*n} = \delta_0\,.$$

Exercice IV. On travaille ici dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$.

IV.1) Rappeler la définition de la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ dans l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, puis dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Quelle est la formule permettant de calculer $\mathcal{F}^{-1}$.

Pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a

$$\hat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi}\, \varphi(x)\, dx.$$

Pour $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$, on a

$$\langle \hat{T}, \varphi\rangle = \langle T, \hat{\varphi}\rangle\,, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

Par ailleurs

$$\mathcal{F}^{-1}\psi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi}\; \psi(\xi)\; d\xi\,.$$

IV.2) Quelle est la transformation de Fourier de la fonction constante égale à 1 ?

C'est $2\pi\,\delta_0$ puisque

$$\langle \hat{\mathbb{1}}_{\mathbb{R}}, \varphi \rangle = \langle \mathbb{1}_{\mathbb{R}}, \hat{\varphi} \rangle = \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\xi)\, d\xi = 2\pi\, \mathcal{F}^{-1}(\hat{\varphi})(0) = 2\pi\, \varphi(0).$$

IV.3) Etant donné $c \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $g_c(x) := e^{-|x|/c}$. Calculer la transformation de Fourier $\hat{g}_c$ de g_c.

On trouve

$$\hat{g}_c(\xi) = \int_{-\infty}^{0} e^{-ix\xi}\, e^{x/c}\, dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-ix\xi}\, e^{-x/c}\, dx = \frac{1}{(1/c) - i\xi} + \frac{1}{(1/c) + i\xi} = \frac{2\,c}{1 + c^2\,\xi^2}.$$

IV.4) Identifier la limite (pour $n \to +\infty$) dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ de la suite $(g_n)_n$, et en déduire la limite dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ de la suite $(\hat{g}_n)_n$.

La suite $(g_n)_n$ converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ vers $\mathbb{1}_{\mathbb{R}}$. Par continuité de la transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, la suite $(\hat{g}_n)_n$ converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ vers $\hat{\mathbb{1}}_{\mathbb{R}} = 2\pi\,\delta_0$.

IV.5) Déterminer $\widehat{g_n'}$.

$$\widehat{g_n'}(\xi) = 2\,i\,\xi\,\hat{g}_n(\xi) = \frac{2\,i\,n\,\xi}{1 + n^2\,\xi^2}.$$

IV.6) Déduire de ce qui précède la limite (pour $n \to +\infty$) de $\widehat{g_n'}$.

Comme la dérivation et la transformation de Fourier sont continues dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \widehat{g_n'} = \widehat{\mathbb{1}_{\mathbb{R}}'} = 0.$$

On peut aussi remarquer que pour $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, avec $n\,\xi = \tilde{\xi}$ et A assez grand, on a

$$\Big| \int_{\mathbb{R}} \widehat{g_n'}(\xi)\, \chi(\xi)\, d\xi \Big| = \Big| \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} \frac{2\,i\,\tilde{\xi}}{1 + \tilde{\xi}^2}\, \chi\Big(\frac{\tilde{\xi}}{n}\Big)\, d\tilde{\xi} \Big| \le \frac{2}{n}\, \|\, \chi \,\|_\infty \int_0^{n\,A} \frac{2\,\tilde{\xi}}{1 + \tilde{\xi}^2}\, d\tilde{\xi}.$$

Le membre de droite vaut

$$\frac{2}{n}\, \|\, \chi \,\|_\infty\, \ln\,(1 + n^2\, A^2)$$

qui tend vers 0 pour $n \to +\infty$.

IV.7) On se donne $(a,b) \in \mathbb{R}_+^2$ avec $0 < a < b$. On considère l'équation fonctionnelle

$$(\star) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{(x-t)^2 + a^2}\, dt = \frac{1}{x^2+b^2}\,, \qquad x \in \mathbb{R}$$

d'inconnue la fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$.

IV.7.1) Utiliser la question IV.3) en vue d'interpréter $(\star)$ à l'aide d'opérations impliquant $\hat{g}_{1/a}$ et $\hat{g}_{1/b}$.

La question IV.3) fournit

$$\frac{1}{2\,c}\ \hat{g}_{1/c}(x) = \frac{1}{x^2+c^2}.$$

On doit donc résoudre

$$\frac{1}{2\,a}\ \hat{g}_{1/a} * f = \frac{1}{2\,b}\ \hat{g}_{1/b}.$$

IV.7.2) Utiliser la transformation de Fourier pour déterminer les fonctions f qui sont solutions de $(\star)$.

On note $\mathcal{R}$ la symétrie $\mathcal{R}f(x) = f(-x)$ et $\mathcal{F}$ la transformation de Fourier. On rappelle que $\mathcal{F} \circ \mathcal{F} = 2\,\pi\,\mathcal{R}$. Passant côté Fourier, on obtient

$$\frac{1}{2\,a}\ \mathcal{R}g_{1/a}\ \hat{f} = \frac{1}{2\,b}\ \mathcal{R}g_{1/b}.$$

Comme g est paire, cela revient à imposer

$$\hat{f}(\xi) = \frac{a}{b}\ \frac{g_{1/b}(\xi)}{g_{1/a}(\xi)} = \frac{a}{b}\ g_{1/(b-a)}(\xi).$$

On applique $\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{R} \circ \mathcal{F}/(2\,\pi)$ pour obtenir

$$f(x) = \frac{1}{2\,\pi}\ \frac{a}{b}\ \mathcal{R}\hat{g}_{1/(b-a)}(x) = \frac{1}{2\,\pi}\ \frac{a}{b}\ \hat{g}_{1/(b-a)}(x) = \frac{1}{\pi}\ \frac{a}{b}\ \frac{(b-a)}{x^2+(b-a)^2}.$$

Exercice V. Existe-t-il une fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ non nulle telle que

$$\int_{\mathbb{R}} x^k\, f(x)\, dx = 0\,, \qquad \forall k \in \mathbb{N}\,?$$

La condition, interprétée côté Fourier, équivaut à imposer que la fonction $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ soit nulle ainsi que toutes ses dérivées en 0. Il suffit de prendre $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ non nulle, à support dans $[1,2]$, et poser $f = \mathcal{F}^{-1}\varphi$ pour pouvoir conclure : OUI.

Exercice VI. Montrer que la distribution $vp\,(1/x)$ est une distribution tempérée.

On écrit

$$\begin{aligned}\langle vp\,\Big(\frac{1}{x}\Big), \varphi\rangle &= \int_0^1 \frac{1}{x}\,\Big[\varphi(x) - \varphi(-x)\Big]\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,\Big[\varphi(x) - \varphi(-x)\Big]\,dx \\ &\leq 2\,\parallel \varphi' \parallel_{L^\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\Big[|x\,\varphi(x)| + |-x\,\varphi(-x)|\Big]\,dx \leq 4\,\mathcal{N}_1(\varphi)\,.\end{aligned}$$