UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Distribution et ANalyse de Fourier

CC3 du 18/03/2019 (durée 20mn)

Les documents ne sont pas autorisés

Nom : **Prénom :**

Dans le cas d'une réponse par OUI *ou par* NON, *on demande d'entourer la bonne réponse (ou de barrer la mauvaise réponse). Si c'est* OUI, *donner une preuve. Si c'est* NON, *fournir un contre-exemple.*

Question de cours. Soient Ω_1 un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et Ω_2 un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On se donne des distributions $S \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$, ainsi qu'une fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Expliquer comment se calcule le produit tensoriel $S \otimes T$ évalué sur $\varphi(x_1, x_2)$.

$$\langle S \otimes T, \varphi \rangle =$$

On prend $m = n = 1$. Calculer ce que vaut :

$$\langle \delta_1'' \otimes \delta_0'', \varphi \rangle =$$

Exercice I. Montrer que si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, on a $(e^x T) \star (e^x S) = e^x (T \star S)$.

Exercice II. On rappelle que la fonction d'Heaviside $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vaut 0 pour $x < 0$ et qu'elle vaut 1 pour $0 \leq x$. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une distribution à support compact. Trouver une formule simple permettant de déterminer une primitive S de T (on a $S' = T$) à l'aide de H et de T.

$$S =$$

T.S.V.P. $\Longrightarrow$

Exercice III. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $H^{*n} = H \star H \star \cdots \star H$ la convolée n fois de la fonction d'Heaviside. Alors la dérivée $n^{\text{ième}}$ de H^{*n} est la masse de Dirac δ_0.

OUI - NON

Exercice IV. On se place dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

IV.1) Etant donné $k \in \mathbb{Z}$, calculer

$\delta_k * \mathbb{1}'_{[0,1]} =$

IV.2) Trouver $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vérifiant $u * \mathbb{1}_{[0,1]} = \delta_0$.

$u =$

Exercice V. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ une distribution homogène de degré $\alpha \in \mathbb{R}$. Prouver *l'identité d'Euler* suivante

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \alpha T.$$

Indication : Tester T contre $\varphi(\lambda x)$, dériver en λ, puis faire $\lambda = 1$.