UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Distribution et ANalyse de Fourier

Corrigé du CC3 du 18/03/2019

Les documents ne sont pas autorisés

Nom : **Prénom :**

Dans le cas d'une réponse par OUI *ou par* NON, *on demande d'entourer la bonne réponse (ou de barrer la mauvaise réponse). Si c'est* OUI, *donner une preuve. Si c'est* NON, *fournir un contre-exemple.*

Question de cours. Soient Ω_1 un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et Ω_2 un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On se donne des distributions $S \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$ et $T \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$, ainsi qu'une fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Expliquer comment se calcule le produit tensoriel $S \otimes T$ évalué sur $\varphi(x_1, x_2)$.

$$\langle S \otimes T, \varphi \rangle = \langle S, \langle T, \varphi(x_1, \cdot) \rangle \rangle.$$

On prend $m = n = 1$. Calculer ce que vaut :

$$\langle \delta_1'' \otimes \delta_0'', \varphi \rangle = \langle \delta_1'', \langle \delta_0'', \varphi(x_1, \cdot) \rangle \rangle = \langle \delta_1'', \partial^2_{x_2 x_2} \varphi(x_1, 0) \rangle = \partial_x^{(2,2)} \varphi(1, 0).$$

Exercice I. Montrer que si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{E}'(\mathbb{R})$, on a $(e^x T) \star (e^x S) = e^x (T \star S)$.

Puisque $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et que la convolution est une application bilinéaire continue sur $\mathcal{D}'(\mathbb{R}) \times \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, il suffit de montrer l'identité pour $T \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ et $S \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On peut alors écrire

$$(e^x T) \star (e^x S)(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{x-y} T(x-y) e^y S(y) dy = e^x (T \star S)(x).$$

Exercice II. On rappelle que la fonction d'Heaviside $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vaut 0 pour $x < 0$ et qu'elle vaut 1 pour $0 \leq x$. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une distribution à support compact. Trouver une formule simple permettant de déterminer une primitive S de T (on a $S' = T$) à l'aide de H et de T.

$S = H \star T$ convient car alors $S' = H' \star T = \delta \star T = T$.

T.S.V.P. $\Longrightarrow$

Exercice III. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $H^{*n} = H \star H \star \cdots \star H$ la convolée n fois de la fonction d'Heaviside. Alors la dérivée $n^{\text{ième}}$ de H^{*n} est la masse de Dirac δ_0.

OUI

En effet $(H^{*n})^{(n)} = H' \star H' \star \cdots \star H' = \delta_0 \star \delta_0 \star \cdots \star \delta_0 = \delta_0$.

Exercice IV. On se place dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

IV.1) Etant donné $k \in \mathbb{Z}$, calculer

$$\delta_k * \mathbb{1}'_{[0,1]} = \delta_k * (\delta_0 - \delta_1) = \delta_k - \delta_{k+1}.$$

IV.2) Trouver $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vérifiant $u * \mathbb{1}_{[0,1]} = \delta_0$.

$u = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta'_n$ car alors $u * \mathbb{1}_{[0,1]} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta'_n * \mathbb{1}_{[0,1]} = \sum_{n \in \mathbb{N}} \delta_n * \mathbb{1}'_{[0,1]} = \sum_{n \in \mathbb{N}} (\delta_n - \delta_{n+1}) = \delta_0$.

Exercice V. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ une distribution homogène de degré $\alpha \in \mathbb{R}$. Prouver *l'identité d'Euler* suivante en testant T contre $\varphi(\lambda x)$ et en faisant varier λ dans $\mathbb{R}$.

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial T}{\partial x_j} = \alpha T\,.$$

Par définition de l'homogénéité, on sait que

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \lambda^{-n} \langle T, \varphi(x/\lambda) \rangle = \lambda^{\alpha} \langle T, \varphi(x) \rangle.$$

On dérive (sous le signe somme) par rapport à λ *pour obtenir*

$$-n\lambda^{-n-1} \langle T, \varphi(x/\lambda) \rangle + \lambda^{-n-1} \langle T, \lambda \sum_{j=1}^{n} x_j (\partial_{x_j} \varphi)(x/\lambda) \rangle = \alpha \lambda^{\alpha-1} \langle T, \varphi(x) \rangle.$$

On fait $\lambda = 1$*. Cela devient*

$$-n\langle T, \varphi \rangle + \langle \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}(x_j T), \varphi \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle x_j \partial_{x_j} T, \varphi \rangle = \alpha \langle T, \varphi \rangle.$$