
 Examen de seconde session, le 27/06/2018 (durée 2h)

Les documents ne sont pas autorisés

Nom :

Prénom :

Dans le cas d'une réponse par OUI ou par NON, on demande d'entourer la bonne réponse (ou de barrer la mauvaise réponse). Si c'est OUI, donner une preuve. Si c'est NON, fournir un contre-exemple.

Question de cours. Soit Ω un cône ouvert de \mathbb{R}^N avec $N \in \mathbb{N}^*$. On fixe $\beta \in \mathbb{R}$. Etant donné $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, on note M_λ l'homothétie de \mathbb{R}^N de rapport λ . Donner la définition de ce qu'est une distribution homogène de degré β .

$$T \circ M_\lambda =$$

Exercice I. Il n'existe pas de distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et de fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ vérifiant à la fois $\text{supp} T = \{0\}$ et $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$ mais $\langle T, \varphi \rangle \neq 0$.

OUI - NON

Exercice II. Déterminer la limite dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de la suite de distributions suivantes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 (\delta_{1/n} + \delta_{-1/n} - 2\delta_0) =$$

Exercice III. La fonction qui à $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ associe $f(x, y) := (x + iy)^{-1}$ s'étend en une distribution d'ordre 0 sur \mathbb{R}^2 .

OUI - NON

T.S.V.P. \implies

Exercice IV. Soit $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction d'Heaviside qui vaut 0 pour $x < 0$ et 1 pour $x > 0$. Calculer au sens des distributions ce que vaut :

$$\left\{ \frac{d}{dx} - \lambda \right\} (H(x) e^{\lambda x}) =$$

Exercice V. Etant donné $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, on pose :

$$\langle T, \varphi \rangle = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} \varphi(\sin(xy)) dx dy.$$

Donner sans justification ce que vaut le support de T .

$$\text{supp } T =$$

Exercice VI. On travaille dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Soit δ la masse de Dirac en 0 et H la fonction d'Heaviside (qui vaut 0 pour $x < 0$ et 1 pour $0 \leq x$).

VI.1. Calculer les produits de convolution suivants :

$$\delta' * 1 =$$

$$\delta' * H =$$

VI.2. A-t'on la propriété d'associativité : $(1 * \delta') * H = 1 * (\delta' * H)$?

OUI - NON