Examen Final (16 avril 2024)

Durée 90 minutes, calculatrices et documents interdits

Exercice 1.

1. Soit $f\colon [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Compléter par un symbole (d'implication ou d'équivalence) rendant l'affirmation suivante vraie :

   $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ est convergente $\qquad\qquad$ $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente.

2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour que $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ converge.

3. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(x)\mathrm{d}x$ est-elle convergente ? Justifier.

4. Donner les valeurs des limites suivantes. On ne demande pas de justifier.

   $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)}{x} =$ $\qquad\qquad$ $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2} =$

5. Exprimer en fonction de $\cos(x)$ les quantités suivantes :

   $\sin(x+\pi) =$

   $\cos(2x) =$

Exercice 2. Pour chacune des fonctions f_i suivantes, donner son domaine de définition $\mathcal{D}_i$, sa décomposition en éléments simples, et en déduire l'expression d'une primitive F_i de f_i. On ne demande pas d'afficher les calculs intermédiaires.

$f_1\colon x \mapsto \frac{2}{x(x-1)}$ $\qquad$ $\mathcal{D}_1 =$

$f_1(x) =$

$F_1(x) =$

$f_2\colon x \mapsto \frac{x+1}{x^2-4}$ $\qquad$ $\mathcal{D}_2 =$

$f_2(x) =$

$F_2(x) =$

$$f_3\colon x \mapsto \frac{1}{4x^2+4x+5} \qquad \mathcal{D}_3 =$$

$f_3(x) =$

$F_3(x) =$

$$f_4\colon x \mapsto \frac{3x+1}{x^2-2x+1} \qquad \mathcal{D}_4 =$$

$f_4(x) =$

$F_4(x) =$

Exercice 3. Indiquer si chacune des intégrales généralisées suivantes converge ou diverge. On justifiera soigneusement les réponses.

$$I_1 = \int_0^{+\infty} (x^3+3)e^{-x}\mathrm{d}x$$

$$I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x)}{x+1}\mathrm{d}x$$

$$I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\ln(x)}{x^2+1}\mathrm{d}x$$

Exercice 4. On s'intéresse à l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$. Toutes les réponses doivent être justifiées.

1. Calculer la limite : $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\sin(x^2)}{\sqrt{x}} =$

2. Déduire la nature de l'intégrale généralisée (convergente ou divergente) pour la borne 0.

3. À l'aide d'un changement de variable, déterminer la constante $\beta \in]0,1[$ telle que
$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^\beta}\mathrm{d}u$ $\qquad \beta =$

4. A l'aide d'une intégration par parties, exprimer l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(u)}{u^\beta}\mathrm{d}u$ en fonction de β et de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u^{\beta+1}}\mathrm{d}u$

5. Étudier la nature de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u^{\beta+1}}\mathrm{d}u$ (convergente ou divergente).

6. En déduire la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ (convergente ou divergente).

7. En exploitant l'inégalité $\dfrac{1-\cos(2\,u)}{2} = \sin^2 u \leq |\sin u|$, montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ ne peut pas être absolument convergente.