Examen Final (16 avril 2024)

Durée 90 minutes, calculatrices et documents interdits

Exercice 1.

1. $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ est convergente $\Leftarrow \int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ est absolument convergente.
2. $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ converge $\Leftrightarrow \alpha < 1$.
3. $\int_0^A \sin(x)\mathrm{d}x = 1 - \cos(A)$ n'a pas de limite quand A tend vers $+\infty$ donc l'intégrale n'est pas convergente.
4. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)}{x} = -1$ $\qquad$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$
5. $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$ $\qquad$ $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$

Exercice 2. $\mathcal{D}_1 =]-\infty, 0[\cup]0, 1[\cup]1, +\infty[$

$f_1(x) = \frac{2}{x-1} - \frac{2}{x}$

$F_1(x) = 2\ln\left(\frac{|x-1|}{|x|}\right) + C$

$\mathcal{D}_2 =]-\infty, -2[\cup]-2, 2[\cup]2, +\infty[$

$f_2(x) = \frac{1/4}{x+2} + \frac{3/4}{x-2}$

$F_2(x) = \frac{1}{4}\ln\left(|x+2||x-2|^3\right) + C$

$\mathcal{D}_3 = \mathbb{R}$

$f_3(x) = \frac{1/4}{(x+1/2)^2+1}$

$F_3(x) = \frac{1}{4}\arctan\left(x + \frac{1}{2}\right) + C$

$\mathcal{D}_4 =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

$f_4(x) = \frac{3}{x-1} + \frac{4}{(x-1)^2}$

$F_4(x) = 3\ln(|x-1|) - \frac{4}{x-1} + C$

Exercice 3.

1. La seule borne impropre est $+\infty$. Par croissances comparées, $\lim_{x\to+\infty} x^2(x^3+3)e^{-x} = 0$, donc il existe $A > 0$ tel que pour $x \geq A$, $x^2(x^3+3)e^{-x} \leq 1$, soit $0 \leq (x^3+3)e^{-x} \leq \frac{1}{x^2}$. Puisque $\int_A^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ converge, I_1 converge par théorème de comparaison.
2. La seule borne impropre est $+\infty$. Puisque $\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \pi/2$, il existe $A > 0$ tel que pour $x \geq A$, $\frac{\arctan(x)}{x+1} \geq \frac{\pi}{4(x+1)} \geq 0$. Puisque $\int_A^{+\infty} \frac{1}{x+1}\mathrm{d}x$ diverge, I_2 diverge par théorème de comparaison.

3. Les deux bornes sont impropres. En 0^+, $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}\ln(x) = \lim_{x\to 0^+} 2\sqrt{x}\ln(\sqrt{x}) = 0$ par croissances comparées, donc $\dfrac{\sqrt{x}\ln(x)}{x^2+1}$ tend vers 0 et il y a convergence (la borne est faussement impropre). Pour $x \geq 1$, $0 \leq x^{5/4}\dfrac{\sqrt{x}\ln(x)}{x^2+1} \leq x^{5/4+1/2-2}\ln(x) = \dfrac{4\ln(x^{1/4})}{x^{1/4}}$ qui tend vers 0 en $+\infty$ par croissances comparées. Ainsi il existe $A > 0$ tel que pour $x \geq A$, $x^{5/4}\dfrac{\sqrt{x}\ln(x)}{x^2+1} \leq 1$ et donc $0 \leq \dfrac{\sqrt{x}\ln(x)}{x^2+1} \leq \dfrac{1}{x^{5/4}}$. Puisque $\displaystyle\int_A^{+\infty}\frac{1}{x^{5/4}}\mathrm{d}x$ converge, il y a convergence en $+\infty$ par théorème de comparaison. Donc I_3 converge.

Exercice 4.

1. $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{\sin(x^2)}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} x^{3/2}\dfrac{\sin(x^2)}{x^2} = 0 \times 1 = 0$
2. $\dfrac{\sin(x^2)}{\sqrt{x}}$ a une limite finie en 0 donc il y a convergence (la borne est faussement impropre).
3. On pose $u = x^2$ soit $\mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x$ ou encore $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}u}{2u^{1/2}}$. Pour tout $A > 1$, le changement de variable donne : $\displaystyle\int_1^A \frac{\sin(x^2)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int_1^{A^2}\frac{\sin(u)}{u^{1/4}}\frac{\mathrm{d}u}{2u^{1/2}} = \frac{1}{2}\int_1^{A^2}\frac{\sin(u)}{u^{3/4}}\mathrm{d}u$ soit $\beta = 3/4$.
4. On primitive $\sin(u)$ en $-\cos(u)$ et on dérive $\dfrac{1}{u^\beta}$ en $\dfrac{-\beta}{u^{\beta+1}}$. L'intégration par parties donne, pour $A > 1$: $\displaystyle\int_1^A \frac{\sin(u)}{u^\beta}\mathrm{d}u = \left[-\frac{\cos(u)}{u^\beta}\right]_1^A - \int_1^A \frac{\beta\cos(u)}{u^{\beta+1}}\mathrm{d}u$. Comme $\beta > 0$, $\dfrac{\cos(u)}{u^\beta} \to 0$ en $+\infty$. D'où $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin(u)}{u^\beta}\mathrm{d}u = \cos(1) - \beta\int_1^{+\infty}\frac{\cos(u)}{u^{\beta+1}}\mathrm{d}u$.
5. La seule borne impropre est $+\infty$. On a pour tout u, $\left|\dfrac{\cos(u)}{u^{\beta+1}}\right| \leq \dfrac{1}{u^{\beta+1}}$. Puisque $\beta+1 > 1$, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{u^{\beta+1}}\mathrm{d}u$ converge, et il y a convergence en $+\infty$ par théorème de comparaison.
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x^2)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\sin(x^2)}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x + \frac{\cos(1)}{2} - \frac{\beta}{2}\int_1^{+\infty}\frac{\cos(u)}{u^{\beta+1}}\mathrm{d}u$. Les deux intégrales de droite convergent par les questions précédentes, donc l'intégrale de gauche converge.
7. Par le même changement de variable que précédemment, on a l'égalité $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin(x^2)}{\sqrt{x}}\right|\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty}\frac{|\sin(u)|}{u^\beta}\mathrm{d}u$. On a pour tout $u \geq 1$, $\dfrac{|\sin(u)|}{u^\beta} \geq \dfrac{1}{2u^\beta} - \dfrac{\cos(2u)}{2u^\beta}$. Par le changement de variable $v = 2u$, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos(2u)}{2u^\beta}\mathrm{d}u = 2^{\beta-2}\int_{1/2}^{+\infty}\frac{\cos(v)}{v^\beta}\mathrm{d}v$ qui converge par la question 5. Puisque $\beta < 1$, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{u^\beta}\mathrm{d}u$ diverge, donc $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{2u^\beta} - \frac{\cos(2u)}{2u^\beta}\right)\mathrm{d}u$ diverge comme somme d'une intégrale divergente et d'une intégrale convergente. Par théorème de comparaison, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{|\sin(u)|}{u^\beta}\mathrm{d}u$ diverge, donc la convergence obtenue à la question 6. ne peut pas être absolue.