Analyse appliquée

CC3 - Le 07/05/2024 - Corrigé

Questions de cours. On fixe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Soit $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ et $g :]a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues vérifiant $f \le g$.

Q1. Expliquer comment le théorème de Fubini permet de calculer l'aire $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ du domaine $A := \{(x,y)\,;\, a < x \le b\,,\, f(x) \le y \le g(x)\}$. Calculer $\mathcal{A}$ lorsque

$$(a,b) = (0,1)\,, \qquad f(x) = 1/(1+x^2)\,, \qquad g(x) = 1/\sqrt{x}\,.$$

- $\mathcal{A} = \int_a^b \Big(\int_{f(x)}^{g(x)} dy \Big)\, dx = \int_a^b (g-f)(x)\, dx.$
- $\mathcal{A} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} - \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = 2 - (\pi/4).$

Q2. On fixe un domaine A de $\mathbb{R}^2$ décrit comme ci-dessus. Soit $h : A \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Expliquer comment le théorème de Fubini permet de calculer le volume $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^3$ du domaine $V := \{(x,y,z)\,;\,(x,y) \in A\,,\, -h(x,y) \le z \le h(x,y)\}$. Calculer $\mathcal{V}$ lorsque

$$A = \{(x,y)\,;\, 0 < x \le 1\,,\, 1/(1+x^2) \le y \le 1/\sqrt{x}\}\,, \qquad h(x,y) = x\,.$$

- $\mathcal{V} = \int_A \Big(\int_{-h(x,y)}^{h(x,y)} dz \Big)\, dxdy = 2 \int_a^b \Big(\int_{f(x)}^{g(x)} h(x,y)\; dy \Big)\; dx\,.$
- $\mathcal{V} = 2 \int_0^1 \Big(\int_{1/(1+x^2)}^{1/\sqrt{x}} x\; dy \Big)\; dx = 2 \int_0^1 \sqrt{x}\, dx - \int_0^1 2\,x/(1+x^2)\, dx = 4/3 - \ln 2.$

Exercice 1. Calculer la valeur des intégrales doubles $\mathcal{I} = \int\!\!\int_A h(x,y)\, dxdy$ lorsque la fonction h et le domaine A sont déterminés comme suit.

1.1. $h(x,y) = \cos(x\,y)$ et $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, 1 \le x \le 2\,,\, 0 \le x\,y \le \frac{\pi}{2}\}$.

$$\mathcal{I} = \int_1^2 \Big(\int_0^{\pi/2x} \cos(x\,y)\, dy \Big)\, dx = \int_1^2 \Big[\frac{\sin(x\,y)}{x} \Big]_0^{\pi/2x} dx = \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx = \ln 2\,.$$

1.2. $h(x,y) = y$ et A est le trapèze (s'aider d'un dessin) délimité par les quatre points

$$A = (-1,0)\,, \qquad B = (1,0)\,, \qquad A' = (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2})\,, \qquad B' = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2})\,.$$

Ses côtés sont portés par les droites d'équation $y = 0$, $y = \sqrt{3/2}$ et $y = \pm\sqrt{3}\,(x \pm 1)$.

On procède par tranches

$$\mathcal{I} = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Big(\int_{-1+y/\sqrt{3}}^{1-y/\sqrt{3}} y\,dx\Big)\,dy = 2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} (y - y^2/\sqrt{3})\;dy = \Big[y^2 - 2\,y^3/3\,\sqrt{3}\Big]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2}\,.$$

Exercice 2. L'objectif est de calculer par un changement de variables l'intégrale double $\mathcal{I} = \int\int_A h(x,y)\,dxdy$ lorsque la fonction h et le domaine A sont déterminés comme suit.

$h(x,y) = y/x$ et $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x \le y \le 2\,x\,,\; x \le y^2 \le 2\,x\,\}$.

2.1. Dessiner (proprement) le domaine A

Intersection d'un secteur angulaire avec deux paraboles horizontales.

2.2. On effectue le changement de variables $\varphi : \tilde{A} \to A$ qui à (u,v) associe $\varphi(u,v) = (x,y)$ avec $u = x/y$ et $v = y^2/x$. Déterminer $\tilde{A}$ et φ.

$\tilde{A} = [1/2, 1] \times [1,2]$ et $\varphi(u,v) = (u^2\,v, u\,v)$.

2.3. Calculer le déterminant jacobien de φ.

$$J\varphi(u,v) = \begin{vmatrix} 2\,u\,v & u^2 \\ v & u \end{vmatrix} = u^2\,v\,.$$

2.4. Déduire de ce qui précède la valeur de $\mathcal{I}$.

Le changement de variables φ fournit

$$\mathcal{I} = \int\int_{\tilde{A}} h\circ\varphi(u,v)\;\, J\varphi(u,v)\,du\,dv = \Big(\int_{1/2}^{1} u\,du\Big)\,\Big(\int_1^2 v\,dv\Big) = \frac{9}{16}\,.$$

Exercice 3. Calculer la valeur des intégrales triples $\mathcal{J} = \int\int\int_V k(x,y,z)\,dxdydz$ lorsque la fonction k et le domaine V sont déterminés comme suit.

2.1. $k(x,y,z) = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, x^2+y^2 \le a^2\,,\; 0 \le z \le a\,\}$.

$$\mathcal{J} = \int\int_{x^2+y^2\le a^2} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\Big(\int_0^a z\;dz\Big)\,dx\,dy = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{\rho\,d\rho}{\rho}\,d\theta = \pi\,a^3\,.$$

2.2. $k(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{9-(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}}$ et $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\,;\, \dfrac{1}{4} \le x^2+y^2+z^2 \le 4\,\}$.

$$\mathcal{J} = \int_0^{2\,\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{1/2}^{2} \frac{1}{\sqrt{9-r^3}}\,r^2\,\cos\theta\;d\theta\,d\varphi dr = 4\,\pi\,\Big[-\frac{2}{3}\,(9-r^3)^{1/2}\Big]_{1/2}^{2} = \frac{8\,\pi}{3}\big(\sqrt{\frac{71}{8}}-1\big)\,.$$

Exercice 4. On considère l'équation différentielle $y''(t)+y(t)^3=0$ associée aux données initiales $y(0)=y_0$ et $y'(0)=y_0'$.

4.1. Interpréter ce problème sous la forme d'un système différentiel non linéaire du type $X'(t)=f(X(t))$ où $X={}^t(y,y')$, la donnée initiale est $X(0)={}^t(y_0,y_0')$ et $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ qui à $X={}^t(X_1,X_2)$ associe $f(X)={}^t(f_1(X),f_2(X))$ est une fonction à déterminer.

On obtient $\begin{pmatrix} y' \\ y'' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} y' \\ -y^3 \end{pmatrix}$ *de sorte que* $f(X)=\begin{pmatrix} f_1(X) \\ f_2(X) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X_2 \\ -X_1^3 \end{pmatrix}$.

4.2. On se donne $(y_0,y_0')\in\mathbb{R}^2$. Montrer (citer le théorème et en vérifier les hypothèses) qu'il existe une unique solution maximale X, définie sur un intervalle ouvert J, au problème de Cauchy précédent.

Il s'agit d'appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz. Pour cela, on a besoin de vérifier que la fonction f est localement Lipschitzien. Or c'est un polynôme, donc de classe C^1, donc localement Lipschitzien sur $\mathbb{R}^2$.

4.3. On introduit la fonction $H:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $H(x_1,x_2)=x_1^4/4+x_2^2/2$. Montrer que la fonction H est constante le long des courbes intégrales.

On calcule

$$\frac{d}{dt}\left[H(y(t),y'(t))\right]=y(t)^3\ y'(t)+y'(t)\ y''(t)=0\,.$$

On a donc

$$(\star)\qquad y(t)^4/4+y'(t)^2/2=H_0:=y_0^4/4+(y_0')^2/2\,,\qquad \forall\, t\in\mathbb{R}\,.$$

4.4. En déduire que toute solution est globale.

De $(\star)$, on déduit que $\|\ X(t)\ \|^2$ reste borné, par exemple par $2\,(\sqrt{H}_0+H_0)$ pour ce qui est de la norme euclidienne. D'après le critère d'explosion, ce n'est possible que si le temps de vie maximal T_m vaut $+\infty$.

4.5. On suppose $(y_0,y_0')\neq(0,0)$. Déduire de la question 4.3 que si y s'annule en $t_0\in\mathbb{R}$ alors $y'(t_0)\neq 0$.

Si $(y_0,y_0')\neq(0,0)$, on a $H_0\neq 0$ de sorte que $y(t_0)^4/4+y'(t_0)^2/2=y'(t_0)^2/2=H_0\neq 0$. Il sensuit que $y'(t_0)\neq 0$.

4.6. On admet qu'il existe un instant $t_1>0$ tel que $y(t_1)=y_0$ et $y'(t_1)\,y_0'>0$. Montrer que la solution est périodique.

Toujours d'après $(\star)$, on a $y'(t_1)^2=2\,H_0-y(t_1)^4/2=2\,H_0-y_0^4/2=(y_0')^2$. Comme par hypothèse, $y'(t_1)$ et y_0' ont le même signe, on a $y'(t_1)=y_0'$. Cela implique que les fonction

$X(t)$ et $X(t_1+t)$ sont solutions du même problème de Cauchy. Par unicité, elles doivent coincider ce qui signifie que la solution est périodique de période t_1.

4.7. On note A le domaine (borné) de $\mathbb{R}^2$ délimité par la courbe intégrale (périodique) issue du point $(y_0, y_0') = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Montrer que l'aire $\mathcal{A}$ de A est donnée par

$$\mathcal{A} = 8 \int_0^1 \sqrt{1-x^4}\, dx\,.$$

Le domaine A est délimité par

$$A = \big\{(x_1, x_2)\,;\, H(x_1, x_2) \leq H(y_0, y_0') = 2\,\big\}\,.$$

Le changement de variables $x_1 = \sqrt{2}\,\tilde{x}_1$ et $x_2 = \sqrt{2}\,\tilde{x}_2$ conduit à

$$\mathcal{A} = \int\!\!\int_A dx_1\, dx_2 = 2 \int\!\!\int_{\tilde{x}_1^4+\tilde{x}_2^2\leq 1} d\tilde{x}_1\, d\tilde{x}_2 = 8 \int_0^1 \sqrt{1-\tilde{x}_1^4}\, d\tilde{x}_1\,.$$