UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Distribution et ANalyse de Fourier

CC2 du 07/02/2018 (durée 30mn)

Les documents ne sont pas autorisés

Nom : **Prénom :**

Dans le cas d'une réponse par OUI *ou par* NON, *on demande d'entourer la bonne réponse (ou de barrer la mauvaise réponse). Si c'est* OUI, *donner une preuve. Si c'est* NON, *fournir un contre-exemple.*

Dans ce qui suit, la fonction $\varrho(\cdot)$ désigne une fonction plateau, positive, de classe $\mathcal{C}^\infty$, valant 1 sur $]-1/2, 1/2[$, et 0 hors de $]-1, 1[$. Etant donné $r \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $\varrho_r(x) := \varrho(x/r)$.

1) Faire un dessin de $\varrho_r(\cdot)$ pour $r \ll 1$.

Une bosse de hauteur 1 *et de petite largeur (de taille* r*) centrée en l'origine.*

2) Faire un dessin de $\varrho_r(\cdot)$ pour $r \gg 1$.

Une bosse de hauteur 1 *et de grande largeur (de taille* r*) centrée en l'origine.*

Question de cours. Donner la définition de ce qu'est une distribution T sur $\mathbb{R}$.

Voir le cours.

Exercice I. Etant donnée une forme linéaire $T : \mathcal{D} := \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, on dit que T est continue pour $\mathcal{D}$ muni de la norme uniforme si :

$$\exists\, C \in \mathbb{R}_+^* \,; \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}\,, \qquad |T(\varphi)| \leq C \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi(x)|\,. \tag{1}$$

1) L'application T qui à $\varphi \in \mathcal{D}$ associe $T(\varphi) := \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\, dx$ est continue pour $\mathcal{D}$ muni de la norme uniforme.

NON

Par l'absurde. On suppose (1) vérifié. On teste (1) sur ϱ_r. *Puisque* $|\varrho_r|$ *est borné par* 1, *cela donne :*

$$\forall\, r \in \mathbb{R}_+^*\,, \qquad |T(\varrho_r)| = |\int_{\mathbb{R}} \varrho(x/r)\, dx| = r\, |\int_{\mathbb{R}} \varrho(x)\, dx| \leq C\,.$$

On obtient une contradiction en faisant tendre r *vers* $+\infty$.

2) L'application T définie en 1) est une distribution d'ordre fini.

OUI

Soit K un compact. Pour $\varphi \in \mathcal{D}$ vérifiant $supp\,\varphi \subset K$, on a :

$$|T(\varphi)| = |\int_K \varphi(x)\,dx| \leq \ mes\,(K) \ \sup_{x\in K} |\varphi(x)|\,,$$

où $mes\,(K)$ désigne la mesure de Lebesgue de K. Cela montre que T est d'ordre 0.

Exercice II. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On fixe $l \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}$.

II.1) Rappeler la formule de Leibniz poussée à l'ordre l pour le produit $\varrho_r\,\varphi$.

$$(\varrho_r\,\varphi)^{(l)}(x) \ = \ \sum_{k=0}^{l} C_l^k \ \varrho_r^{(k)}(x) \ \varphi^{(l-k)}(x) \ = \ \sum_{k=0}^{l} C_l^k \ r^{-k} \ \varrho^{(k)}(x/r) \ \varphi^{(l-k)}(x)\,.$$

II.2.b) On suppose que $\varphi(x) = o(x^m)$ au voisinage de 0. Alors, pour tout entier $l \leq m$, on a $\lim\limits_{r\to 0} \ \sup\limits_{|x|\leq r} \ |(\varrho_r\,\varphi)^{(l)}(x)| = 0$.

OUI

Comme φ est de classe C^∞, la condition $\varphi(x) = o(x^m)$ équivaut à l'annulation (au moins jusqu'à l'ordre m inclus) des dérivées de φ en 0. Pour $0 \leq k \leq l \leq m$, on a $0 \leq m-l+k$ et $\varphi^{(l-k)}(x) = o(x^{m-l+k})$ au voisinage de 0. Il découle alors de la question II.1) l'information :

$$|(\varrho_r\,\varphi)^{(l)}(x)| \ \leq \ \sum_{k=0}^{l} C_l^k \ r^{-k} \ \Big(\sup_{|x|\leq r} \ | \ \varrho^{(k)}(x)|\Big) \ o(r^{m-l+k}) = o(r^{m-l})\,.$$

Comme $l \leq m$, on a au moins un $o(1)$ à droite, ce qui suffit pour conclure.

Exercice III. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une distribution vérifiant :

$$\forall\,\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\,, \qquad \forall\,r \in \mathbb{R}_+^*\,, \qquad T\big((1-\varrho_r)\,\varphi\big) = 0\,. \tag{2}$$

III.1) La distribution T est d'ordre fini.

OUI

Sachant (2) pour $r = 1$, on a :

$$T(\varphi) = T(\varrho\,\varphi) + T\big((1-\varrho)\,\varphi\big) = T(\varrho\,\varphi)\,.$$

Puisque $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, on peut trouver une constante $C \in \mathbb{R}_+$ et un entier $l \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall\,\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\,, \qquad supp\,\varphi \subset [-1,1] \quad \Longrightarrow \quad |T(\varphi)| \leq C \ \max_{0\leq j\leq l} \ \sup_{x\in[-1,1]} \ |\varphi^{(l)}(x)|\,.$$

En particulier, on a :

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\,, \qquad |T(\varphi)| = |T(\varrho\, \varphi)| \leq C \max_{0\leq j\leq l} \sup_{x\in[-1,1]} |(\varrho\, \varphi)^{(l)}(x)|\,.$$

On utilise le II.1) pour récupérer :

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\,, \qquad |T(\varphi)| = |T(\varrho\, \varphi)| \leq C(\varrho) \max_{0\leq j\leq l} \sup_{x\in[-1,1]} |\varphi^{(l)}(x)|\,,$$

où la constante $C(\varrho)$ fait intervenir les dérivées de ϱ jusqu'à l'ordre l. Ainsi, la distribution T est d'ordre l fini.

III.2) On suppose que T est d'ordre $l \in \mathbb{N}$ fini. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ vérifiant $\varphi(x) = o(x^l)$ au voisinage de 0. Montrer à l'aide de l'exercice II que $\langle T, \varphi\rangle = 0$.

On commence par appliquer (2) qui conduit à :

$$\forall\, r \in \mathbb{R}_+^*\,, \qquad T(\varphi) = T(\varrho_r\, \varphi) + T\big((1-\varrho_r)\, \varphi\big) = T(\varrho_r\, \varphi)\,.$$

Comme T est d'ordre l, on a :

$$|T(\varphi)| = |T(\varrho_r\, \varphi)| \leq C \max_{0\leq j\leq l} \sup_{|x|\leq r} |(\varrho_r\, \varphi)^{(j)}(x)|\,.$$

La question II.2.b) dit que le membre de droite converge vers 0 lorsque r tend vers 0. D'où $\langle T, \varphi\rangle = 0$.

III.3) On suppose toujours que T est d'ordre $l \in \mathbb{N}$ fini. Prouver l'existence de nombres a_0, a_1, $\cdots$, a_l ajustés de façon à ce que :

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\,, \qquad \langle T, \varphi\rangle = \sum_{k=0}^{l} a_k\ \varphi^{(k)}(0)\,. \tag{3}$$

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. On fixe r assez grand de façon à avoir $\operatorname{supp}\varphi \subset [-r/2, r/2]$ et $\varrho_r\, \varphi = \varphi$. Par ailleurs, le développement de Taylor de φ à l'ordre l en 0 s'écrit :

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{l} \frac{1}{k\,!}\ \varphi^{(k)}(0)\ x^k + x^{l+1}\ R\varphi(x)\,, \qquad R\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})\,.$$

On a alors par linéarité :

$$T(\varphi) = \sum_{k=0}^{l} \frac{1}{k\,!}\ \varphi^{(k)}(0)\ T(x^k\, \varrho_r) + T\big(x^{l+1}\, R\varphi\, \varrho_r\big)\,.$$

On applique la question III.2) pour éliminer le terme de droite. On voit ainsi apparaître la formule (3) avec $a_k = T(x^k\, \varrho_r)/k\,!$.