UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Fonctions Holomorphes et Fonctions Spéciales

Corrigé du contrôle du lundi 24/02/2014 (Durée : 1h)

Questions de cours

a) Donner la définition de la fonction méromorphe appelée *fonction zêta* (de Riemann).

cf cours.

b) Indiquer la position et l'ordre des pôles de la fonction zêta.

cf cours.

c) Enoncer le théorème des nombres premiers.

cf cours.

Problème

On rappelle que les *polynômes de Bernouilli* peuvent être définis comme l'unique suite de fonctions polynomiales à une indéterminée $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les relations de récurrence :

$$(\star) \qquad B_0 \equiv 1\,, \qquad B'_n = n\,B_{n-1}\,, \qquad \int_0^1 B_{n-1}(t)\,dt = 0\,, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}^*\,.$$

Les *nombres de Bernouilli* $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sont obtenus en posant $b_n := B_n(0)$.

1. Le polynôme B_n est de degré n. Il peut s'écrire à l'aide de la formule de Taylor sous la forme :

$$B_n(X) \;=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{B_n^{(k)}(0)}{k!}\; X^k\,.$$

Etablir l'identité :

$$(\star\star) \qquad B_n(X) \;=\; \sum_{k=0}^{n} C_n^k\; b_{n-k}\; X^k\,, \qquad C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}\,.$$

En itérant la relation $(\star)$, on peut extraire $B_n^{(k)}(t) = n\,(n-1)\cdots(n-k+1)\,B_{n-k}$ de sorte que $B_n^{(k)}(0) = n\,(n-1)\cdots(n-k+1)\,b_{n-k}$. Il suffit de reporter.

2. Expliquer pourquoi $b_n = B_n(1)$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

   C'est encore $(\star)$ qui donne :

$$B_n(1) - B_n(0) = B_n(1) - b_n = \int_0^1 n\ B_{n-1}(t)\ dt = 0\,.$$

3. En déduire que les nombres de Bernouilli peuvent être définis comme l'unique suite de nombres réels $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les relations de récurrence :

$$b_0 \equiv 1\,, \qquad b_n = \frac{-1}{n+1} \sum_{k=2}^{n+1} C_{n+1}^k\ b_{n+1-k}\,, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}^*\,.$$

   On fait $X = 1$ dans $(\star\star)$ ce qui donne avec la question 2 :

$$b_n\ =\ b_n + (n-1)\ b_{n-1} + \sum_{k=2}^{n} C_n^k\ b_{n-k}\,.$$

   Il suffit d'extraire b_{n-1} puis de changer n en $n+1$.

4. D'après le cours, les nombres de Bernouilli peuvent aussi être obtenus en considérant le développement en série entière :

$$F(z,x) := \frac{z\ e^{zx}}{e^z - 1}\ = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{B_k(x)}{k!}\ z^k\,, \qquad F(z,0) = \frac{z}{e^z-1}\ = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b_k}{k!}\ z^k\,.$$

   Etablir la relation :

$$g(z) := \frac{z\ (e^z+1)}{2\ (e^z-1)} = 1 + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{b_k}{k!}\ z^k\,.$$

   On a $b_0 = 1$. De la question 3, on obtient $b_1 = -1/2$ ce qui conduit à l'interprétation :

$$g(z) := \frac{z}{2} + \frac{z}{e^z-1} = 1 + \Big(\frac{z}{e^z-1} - 1 - b_1\, z \Big)\,.$$

5. Montrer que $b_{2p+1} = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

   C'est une preuve faite en cours. On a $F(z, 1-x) = F(-z, x)$Par identification des coefficients des deux séries entières associées, on a $B_k(1-x) = (-1)^k\, B_k(x)$. En particulier, on doit avoir $B_k(1) = b_k = (-1)^k\, b_k$. D'où le résultat.

6. Sur le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1, noté $D(0,1[$, la fonction qui à z associe $\pi z\ \cot(\pi z)$ est holomorphe. Elle se développe en série entière comme indiqué ci-dessous. En s'appuyant sur la question 4, on demande de déterminer la valeur des coefficients c_k :

$$\pi z\ \cot(\pi z)\ = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k\ z^{2k}\,, \qquad c_k = \frac{(-1)^k\,(2\pi)^{2k}\, b_{2k}}{(2k)!}\,.$$

   Il s'agit de remarquer que :

$$\pi z\ \cot(\pi z)\ = g(2i\pi z) =\ 1 + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{b_k}{k!}\ (2i\pi z)^k\,.$$

   La question 5 permet d'éliminer les entiers impairs. Changement de k pair en $2k$.

7. On rappelle que le développement Eulérien de la fonction sinus est donné par :

$$\sin(\pi z)\ =\ \pi z\ \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right).$$

   En déduire que :

$$\pi z\ \cot(\pi z)\ = 1 -\ 2\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^2}{k^2 - z^2}\,.$$

   Considérer la dérivée logarithmique :

$$\pi z\ \cot(\pi z)\ =\ z\ \frac{d}{dz}\sin(\pi z)/\sin(\pi z) =\ z\ \left[\frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\,2\ z/n^2}{1-(z^2/n^2)}\right].$$

8. Combiner ce qui précède en vue de calculer les valeurs de la fonction zêta sur les entiers pairs en fonction des nombres de Bernouilli :

$$\zeta(2n) \;=\; \frac{(-1)^{n-1}\,(2\pi)^{2n}\,b_{2n}}{2\,(2n)!}\,.$$

Pour $z \in D(0,1[$, on a :

$$\pi z\ \cot(\pi z) = 1-2\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{z^2}{k^2}\,\frac{1}{1-(z^2/k^2)} = 1-2\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{z^2}{k^2}\,\frac{z^{2p}}{k^{2p}} = 1-2\sum_{q=1}^{+\infty}\zeta(2q)\ z^{2q}\,.$$

Identifier ces coefficients avec ceux obtenus en question 6.

9. Prouver que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \;=\; \frac{\pi^2}{12}\,.$$

La fonction zêta alternée $G(s)$ est définie ci-dessous, pour Res > 0. Elle vérifie la relation indiquée, vue en TD, qu'on peut retrouver facilement en séparant termes pairs et impairs dans $\zeta(s)$:

$$G(s) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^s}\,, \qquad G(s) = \left(1-2^{1-s}\right)\,\zeta(s)\,.$$

On fait $s=2$. On utilise les questions 8 puis 3 :

$$G(2) = \frac{1}{2}\,\zeta(2) = \frac{\pi^2}{2}\ b_2 = -\,\frac{\pi^2}{2}\,\frac{1}{3}\,\left(3\,b_1 + b_0\right).$$