UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Distribution et ANalyse de Fourier

CC2 du 17/02/2020 - 30 mn

Les documents ne sont pas autorisés

Nom : **Prénom :**

Dans le cas d'une réponse par OUI *ou par* NON, *on demande d'entourer la bonne réponse (ou de barrer la mauvaise réponse). Si c'est* OUI, *donner une preuve. Si c'est* NON, *fournir un contre-exemple.*

Questions de cours. Soit $d \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$.

1) Rappeler ce qu'est la définition d'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ d'ordre $m \in \mathbb{N}$.

2) Etant donnée $a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, comment définit-on la distribution produit $a\partial_x^\alpha T$?

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \qquad \langle a\partial_x^\alpha T, \varphi\rangle =$$

Exercice I. Montrer qu'une distribution positive sur $\mathbb{R}$ est une mesure (c'est à dire une distribution d'ordre 0).

Exercice III. Soit θ une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui-même. On suppose que l'application θ est de classe C^∞ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\theta'(x) > 0$. On désigne par σ l'application réciproque de θ. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une distribution d'ordre $m \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. On pose :

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle T \circ \theta, \varphi\rangle := \langle T, \sigma' \times \varphi \circ \sigma\rangle.$$

II.1) Vérifier la cohérence de cette définition dans le cas $T \equiv T_f$ avec $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

II.2) Montrer que $T \circ \theta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Quel est l'ordre de la distribution $T \circ \theta$?

II.3) Vérifier que $\langle (T \circ \theta)', \varphi \rangle = \langle T', \varphi \circ \sigma \rangle$.

II.4) Vérifier que $\langle \theta' \times (T' \circ \theta), \varphi \rangle = \langle T', \varphi \circ \sigma \rangle$. Conclusion ?

II.5) Etant donné $x \in \mathbb{R}$, soit δ_x la masse de Dirac en x. Calculer $\delta_0' \circ \theta$ pour $\theta(x) = x^3 + x + 2$. Déterminer (sans justification) les coefficients numériques dans la formule ci-dessous.

$$\delta_0' \circ \theta = \qquad \times \delta_{-1} + \qquad \delta_{-1}'.$$