UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Distribution et ANalyse de Fourier

Corrigé du CC2 du 17/02/2020

Les documents ne sont pas autorisés

Nom : **Prénom :**

Dans la cas d'une réponse par OUI *ou par* NON, *on demande d'entourer la bonne réponse (ou de barrer la mauvaise réponse). Si c'est* OUI, *donner une preuve. Si c'est* NON, *fournir un contre-exemple.*

Questions de cours.

1) Rappeler ce qu'est la définition d'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ d'ordre $m \in \mathbb{N}$.

Voir le cours.

2) Etant donnée $a \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, comment définit-on la distribution produit $a\partial_x^\alpha T$?

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \qquad \langle a\partial_x^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, \partial_x^\alpha(a\varphi)\rangle.$$

Exercice I. Montrer qu'une distribution positive sur $\mathbb{R}$ est une mesure (c'est à dire une distribution d'ordre 0).

Une distribution est positive si et seulement si :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \varphi \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad \langle T, \varphi\rangle \geq 0.$$

Cela implique :

$$\forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \varphi \geq \psi \quad \Longrightarrow \quad \langle T, \varphi\rangle \geq \langle T, \psi\rangle.$$

Soit K un compact, et $\chi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ qui vaut 1 sur K. Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ à support contenu dans K, on a :

$$- \parallel \varphi \parallel_\infty \chi \leq \varphi \leq \parallel \varphi \parallel_\infty \chi,$$

de sorte que :

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq C \parallel \varphi \parallel_\infty, \quad C := \langle T, \chi\rangle.$$

Exercice II. Soit θ une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui-même. On suppose que l'application θ est de classe C^∞ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\theta'(x) \neq 0$. On désigne par σ l'application réciproque de θ. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une distribution d'ordre $m \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. On pose :

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad \langle T \circ \theta, \varphi\rangle = \langle T, \sigma' \times \varphi \circ \sigma\rangle.$$

II.1) Vérifier la cohérence de cette définition dans le cas $T \equiv T_f$ avec $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

Il s'agit de vérifier la cohérence de cette définition avec ce qu'on obtient lorsque la distribution T est donnée par une fonction f dans $L^1_{loc}(\mathbb{R})$, ce qui conduit à $T \circ \theta \equiv f \circ \theta$. Par le changement de variables $y = \theta(x)$, sachant que $\sigma'(y)\theta'(x) = 1$ de sorte que $dx = \sigma(y)dy$, on a effectivement pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$:

$$\langle f \circ \theta, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} f \circ \theta(x)\varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(y)\varphi \circ \sigma(y)\sigma'(y)\, dy = \langle f, \sigma' \times \varphi \circ \sigma \rangle.$$

II.2) Montrer que $T \circ \theta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Quel est l'ordre de la distribution $T \circ \theta$?

Comme T est une distribution, pour tout compact K et toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ dont le support est contenu dans K, il existe une constante C_K telle que :

$$|\langle T \circ \theta, \varphi \rangle| \leq C_K \max_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |\partial_x^\alpha (\sigma' \times \varphi \circ \sigma)(x)| \leq \tilde{C}_K \max_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |\partial_x^\alpha \varphi(x)|$$

où, pour obtenir la seconde inégalité, on a utilisé la formule de Leibniz et le fait que les dérivées de σ (jusqu'à l'ordre $|\alpha| + 1$) sont uniformément bornées sur K. On peut remarquer que les distributions T et $T \circ \theta$ sont de même ordre m.

II.3) Vérifier que $(T \circ \theta)' = \theta' \times (T' \circ \theta)$.

On teste le membre de gauche contre $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ pour récupérer :

$$\langle (T \circ \theta)', \varphi \rangle = -\langle T \circ \theta, \varphi' \rangle = -\langle T, \sigma' \times \varphi' \circ \sigma \rangle = -\langle T, (\varphi \circ \sigma)' \rangle = \langle T', \varphi \circ \sigma \rangle.$$

II.4) Vérifier que $\langle (T \circ \theta)', \varphi \rangle = \langle T', \varphi \circ \sigma \rangle$.

On teste le membre de gauche contre $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ pour récupérer :

$$\langle \theta' \times (T' \circ \theta), \varphi \rangle = \langle T' \circ \theta, \theta' \times \varphi \rangle = \langle T', \sigma' \times \theta' \circ \sigma \times \varphi \circ \sigma \rangle = \langle T', \varphi \circ \sigma \rangle.$$

En comparant les résultats obtenus ci-dessus, on retrouve (une extension de) la formule usuelle de dérivation composée des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, à savoir :

$$(T \circ \theta)' = \theta' \times T' \circ \theta.$$

II.4) Soit δ_0 la masse de Dirac en zéro. Calculer $\delta_0' \circ \theta$ pour $\theta(x) = x^3 + x + 2$. On demande de donner le résultat (avec les valeurs numériques) sans justification.

On commence par remarquer que $\theta'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $\theta(-1) = 0$. Ainsi, la fonction θ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui-même, d'application réciproque σ, et on a $\sigma(0) = -1$. On applique ce qui précède :

$$\begin{aligned} \langle \delta_0' \circ \theta, \varphi \rangle &= \langle \delta_0', \sigma' \times \varphi \circ \sigma \rangle = -\langle \delta_0, (\sigma' \times \varphi \circ \sigma)' \rangle = -\langle \delta_0, \sigma'' \times \varphi \circ \sigma + (\sigma')^2 \times \varphi' \circ \sigma \rangle \\ &= -\sigma''(0) \times \varphi(-1) - \sigma'(0)^2 \times \varphi'(-1) = \frac{\theta''(-1)}{\theta'(-1)^3} \langle \delta_{-1}, \varphi \rangle + \frac{1}{\theta'(-1)^2} \langle \delta_{-1}', \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Autrement dit :

$$\delta_0' \circ \theta = -\frac{3}{32}\delta_{-1} + \frac{1}{16}\delta_{-1}'.$$